COMMERCIUM
EPISTOLICUM

J. COLLINS ET ALIORUM

DE ANALYSI PROMOTA, ETC.,

OU

CORRESPONDANCE

DE J. COLLINS ET D'AUTRES SAVANTS CÉLÈBRES DU XVII[e] SIÈCLE,

RELATIVE

A L'ANALYSE SUPÉRIEURE,

RÉIMPRIMÉE SUR L'ÉDITION ORIGINALE DE 1712 AVEC L'INDICATION DES VARIANTES DE L'ÉDITION DE 1722,
COMPLÉTÉE PAR UNE COLLECTION DE PIÈCES JUSTIFICATIVES ET DE DOCUMENTS,

ET PUBLIÉE

PAR J.-B. BIOT,
MEMBRE DE L'INSTITUT,

ET

F. LEFORT,
INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES.

Nemo in causa propria sibi testis est.
(NEWTON.—*Recensio libri...* pag. 25.)

PARIS,
MALLET-BACHELIER, GENDRE ET SUCCESSEUR DE BACHELIER,
IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1856

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

AVERTISSEMENT.

Quoique mon nom se trouve en tête de cette publication, associé à celui de M. Lefort, je n'y ai de part que pour le projet. L'exécution appartient tout entière à M. Lefort; et il s'est acquitté de cette tâche avec un soin, une érudition mathématique, une puissance de travail, que je suis heureux de reconnaître, mais qu'il m'aurait été impossible d'y apporter. Dans ma première pensée, je m'étais seulement proposé de réimprimer le texte original du *Commercium Epistolicum* de 1712, avec les variantes qu'on y a introduites en 1722, plus le *Recensio* et l'avis *Ad lectorem :* trois écrits dont on sait maintenant que les deux derniers ont été rédigés par Newton, qui est aussi l'auteur des variantes, et que le premier a été, pour le moins, inspiré, dirigé par lui, si même il n'a pris une part plus directe à sa confection. Dans cette idée d'une simple réimpression, j'avais demandé à Monsieur le Ministre de l'Instruction publique de vouloir bien accorder à M. Mallet-Bachelier une modique allocation, qui suffît pour en couvrir les premiers risques; et il s'était rendu à ma prière, avec cette facilité de disposition bienveillante qu'il m'a toujours montrée à seconder les projets utiles aux sciences, quand ils lui sont présentés avec désintéressement et sincérité. Mais M. Lefort me fit bientôt remarquer que notre publication aurait bien plus d'utilité, et serait probablement bien plus recherchée des géomètres, si au lieu de la restreindre aux écrits que j'avais voulu y comprendre, lesquels sont

tous intentionnellement dirigés contre Leibnitz, on y joignait un recueil choisi de textes et de documents contemporains, qui accompagnassent contradictoirement les accusations; en sorte que le lecteur pût instruire et juger la cause par lui-même, au lieu de la voir exposée et plaidée dans un seul sens. La justesse de cette remarque était évidente, et j'y accédai d'autant plus aisément, que M. Lefort prenait encore sur lui tout ce travail de recherche. De son côté, M. Mallet-Bachelier ne recula point devant ces additions, qui doublaient l'étendue du volume projeté; et de là il est sorti tel que nous l'offrons au public. Maintenant mon rôle de narrateur est fini. Je laisse M. Lefort exposer lui-même le plan sur lequel est conçue cette nouvelle édition, les rapports qu'il a établis entre ses diverses parties, et toutes les dispositions qu'il a prises pour la rendre aussi utile qu'elle pouvait l'être.

J.-B. BIOT.

Le désir de reproduire fidèlement l'édition de 1712, d'en faciliter la réimpression et la lecture, m'a fait rejeter l'idée d'accompagner le texte de notes critiques qui eussent formé en quelque sorte un commentaire perpétuel. Cette disposition, très-convenable pour l'interprétation philologique d'un ouvrage chinois ou sanscrit, serait ici plus nuisible qu'utile; car la multiplicité des interruptions empêcherait de suivre la chaîne des raisonnements. Je me suis dès lors borné à établir, quand cela était indispensable, la correspondance des pages dans les éditions de 1712 et de 1856, et à signaler les variantes de l'édition de 1722. Ces variantes sont indiquées en note par des crochets [ ], et leur caractère matériel est généralement défini par un mot : Addition, Suppression, Altération, Interpolation, etc.

Après avoir reproduit exactement les textes, il était nécessaire de s'assurer que la transcription des écrits qu'on y a cités avait été fidèle.

Il fallait rétablir les altérations ou omissions, s'il en existait; au besoin en fixer le sens; et rassembler les documents contemporains qui pouvaient fournir de nouvelles lumières. Tel était sans doute le travail que Leibnitz se proposait de faire, lorsqu'il écrivait à Chamberlayne le 25 août 1714 : « Puisqu'il semble qu'on a encore des lettres qui me « regardent parmi celles de M. Oldenbourg et de M. Collins, qui « n'ont pas été publiées, je souhaiterois que la Société Royale voulût « donner ordre de me les communiquer. Car, quand je serai de retour « à Hanover, je pourrai publier aussi un *Commercium Epistolicum* « qui pourra servir à l'histoire littéraire. Je serai disposé de ne pas « moins publier les lettres qu'on peut alléguer contre moi, que celles « qui me favorisent, et j'en laisserai le jugement au public. » La vie agitée de Leibnitz et sa fin prématurée ne lui ont pas laissé le temps d'accomplir ce projet; il est douteux d'ailleurs qu'il eût obtenu de la Société Royale, présidée par son antagoniste, la communication qu'il demandait. J'ai tâché de remplir le vœu de Leibnitz, selon la mesure de mes forces, en ajoutant un Supplément au *Commercium Epistolicum*.

A défaut de pièces originales qu'il ne m'était pas possible de consulter, j'ai cherché des documents authentiques, rassemblés dans quelques ouvrages rares, ou épars dans de volumineuses collections. Je les ai extraits et classés, en m'astreignant à l'ordre suivi par les premiers éditeurs du *Commercium*. Quelques publications, récemment faites en Allemagne et en Angleterre, m'ont également fourni des indications précieuses ou des pièces importantes; et je ne dois pas moins à MM. Uylenbroek, Gerhardt, Edleston, Brewster et de Morgan, qu'à Wallis, à Des Maizeaux, et aux éditeurs du *Journal littéraire* de La Haye. Chaque document, fidèlement transcrit, porte l'indication de la source où il a été puisé. Le lecteur peut, de cette manière, se procurer une connaissance plus approfondie du sujet, si l'extrait ne lui paraît pas suffisant. Ici, je n'étais plus dominé par les conditions d'une réimpression, et je pouvais prendre en toute liberté le rôle de rapporteur. En conséquence, dans ce Supplément, je ne me suis fait aucun scru-

pule d'accompagner les textes de notes succinctes, toutes les fois qu'il m'a paru utile d'éclaircir des faits douteux, de signaler des réticences ou des omissions de quelque importance, d'indiquer des ouvrages ou articles à consulter, etc., mon dessein étant de fournir au lecteur tous les éléments d'une saine et impartiale appréciation. Mais il fallait en même temps rapprocher les pièces forcément disjointes de la controverse : c'est le but que je me suis proposé d'atteindre par la rédaction d'une table des matières. Ce n'est pas, à proprement parler, une table raisonnée, quoiqu'elle renferme des détails critiques sur certains articles; c'est, surtout en ce qui concerne les matériaux de la controverse, une table chronologique et de concordance. Elle devra être fréquemment consultée pour que l'on puisse à propos recourir au Supplément, qui contient les éléments de vérification.

L'étude des documents que je viens d'indiquer ne suffit pas pour faire acquérir une idée complète des caractères originaux, qui marquent l'invention, dans les travaux de Newton et dans ceux de Leibnitz. L'analyse infinitésimale n'a point apparu comme une de ces illuminations soudaines, qui sortent du cerveau d'un homme de génie, et qui éblouissent autant qu'elles éclairent : elle a été préparée de longue main; et on en trouve le germe chez Archimède comme chez Fermat. Au temps de Newton et de Leibnitz l'analyse infinitésimale était dans l'air : aussi le vénérable et savant Wallis, quoiqu'il fût réellement animé de sentiments de bienveillance à l'égard des deux illustres rivaux, s'est-il toujours refusé à reconnaître rien d'essentiellement nouveau dans la méthode des fluxions et dans le calcul différentiel. En se plaçant presque au même point de vue, Lagrange et Laplace ont déclaré, l'un, que l'on pouvait, l'autre, que l'on devait regarder Fermat comme le premier inventeur du calcul différentiel ou fluxionnel [1]. Cette opinion n'a pas été partagée par Poisson : « Il me semble, dit-il [2], que ce calcul

[1] Lagrange, *Calcul des fonctions*, leçon dix-huitième.
Laplace, *Introduction à la théorie des probabilités*.

[2] Poisson, *Mémoire sur le calcul des variations*, lu à l'Académie des Sciences le 10 novembre 1831. — *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome XII, 1833.

« consiste dans un ensemble de règles propres à trouver immédiate- « ment les différentielles de toutes les fonctions, plutôt que dans « l'usage qu'on fera de ces variations infiniment petites pour résoudre « tel ou tel problème; et, sous ce rapport, la création du calcul « différentiel ne remonte pas au delà de Leibnitz, auteur de l'algo- « rithme et de la notation qui ont généralement prévalu dès l'origine « de ce calcul, et auquel l'analyse infinitésimale est principalement « redevable de tous ses progrès. » En présence de ces appréciations divergentes, qui reposent sur l'autorité de si grands noms, j'ai pensé que l'on trouverait de l'intérêt à pouvoir suivre comparativement les idées des géomètres du XVIIe siècle, qui ont préparé l'invention du calcul infinitésimal. J'ai donc présenté, dans une dernière partie additionnelle, un exposé sommaire des principaux travaux entrepris et des résultats obtenus dans cette voie nouvelle, avant Newton et Leibnitz. Je me suis restreint à l'intervalle compris entre les années 1630 et 1670, que l'on peut considérer comme la période d'élaboration du calcul différentiel. Voulant faire ici de l'histoire, non de la critique, je ne me suis pas hasardé à rapprocher les méthodes, encore moins à porter un jugement sur leur valeur respective, et, pour éviter toute intervention personnelle, j'ai laissé aux auteurs eux-mêmes le soin de les exposer. Ma responsabilité ne porte donc que sur le sujet, et sur l'étendue des extraits que j'ai rapportés. Si le choix a été bien fait, le lecteur qui voudra comparer les pièces entre elles, acquerra une connaissance complète des origines d'où sont sortis les nouveaux calculs.

Il ne m'a pas paru convenable de terminer la publication à ce point : la partie critique de mon travail, bornée à de courtes annotations disséminées dans la seconde moitié du recueil, restait trop incomplète. Ne fallait-il pas d'ailleurs une conclusion explicite, qui fît suite à ces documents destinés à éclairer d'un nouveau jour la matière de la controverse? Cette conclusion, sans doute, est aujourd'hui donnée par la conscience à peu près unanime des géomètres; cependant la vérité n'est parvenue qu'à grand'peine à percer les ténèbres profondes

dont la passion s'est plu à l'envelopper, et jusqu'ici les arguments fondamentaux sur lesquels elle s'appuie, n'ont pas été directement rattachés aux pièces du procès. Ces considérations m'ont déterminé à écrire le résumé critique qui termine le volume, quoique les principaux points litigieux aient été déjà discutés par un grand nombre d'hommes éminents, dont ma voix ne peut être qu'un bien faible écho.

F. LEFORT.

Paris, le 22 mars 1856.

TABLE DES MATIÈRES.

Sommaire des principaux travaux mathématiques qui, au XVII[e] *siècle, ont préparé l'invention de l'analyse infinitésimale.*

Conclusion.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

COMMERCIUM

EPISTOLICUM

DE

Varia Re Mathematica;

INTER

Celeberrimos præsentis seculi Mathematicos.

VIZ

Isaacum Newtonum Equitem Auratum.

Dnum Isaacum Barrow.	Dnum J. Collinium.
Dnum Jacobum Gregorium.	Dnum Gulielmum Leibnitium.
Dnum Johannem Wallisium.	Dnum Henricum Oldenbourgum.
Dnum J. Keillium.	Dnum Franciscum Slusium.

ET ALIOS.

Jussu Societatis Regiæ in lucem editum.

ET JAM

Una cum Recensione præmissa insignis Controversiæ inter Leibnitium et Keillium de primo Inventore Methodi Fluxionum; et Judicio primarii, ut ferebatur, Mathematici subjuncto, iterum impressum.

LONDINI:

Impensis *J. Tonson*, et *J. Watts*, Prostant venales apud *J. Mac Euen* ad Insigne Georgii Buchanani et regione templi Sancti Clementis in vico vulgo dicto *the Strand*. — 1725.

COMMERCIUM
EPISTOLICUM

D. Johannis Collins

ET ALIORUM,

DE

ANALYSI PROMOTA,

Jussu SOCIETATIS REGIÆ in lucem editum:

ET JAM

Unà cum ejusdem Recensione præmissa, et judicio primarii, ut ferebatur, Mathematici subjuncto, iterum impressum.

LONDINI:
Ex officinà *J. Tonson* et *J. Watts*.

MDCCXXII.

AD LECTOREM.

Cum primum Commercium Epistolicum lucem vidit, D. Leibnitius *Viennæ agens, ut librum sine responso dimitteret, prætendit per biennium se eundem non vidisse, sed ad judicium primarii Mathematici et harum rerum peritissimi et a partium studio alieni se provocasse. Et sententiam ejus* 7 Jun. 1713 *datam, schedulæ volanti* 29 Julii *datæ inclusam, per orbem sparsit, sine nomine vel Judicis vel Impressoris vel Urbis in qua impressa fuit. Et sub finem anni* 1715 *in Literis quæ ad Abbatem* de Comitibus tunc* Londini *agentem scripsit, confugit ad Quæstiones novas de Qualitatibus occultis, Gravitate universali, Miraculis, Organis et Sensorio Dei, Spatio, Tempore, Vacuo, Atomis, Perfectione mundi, et Intelligentia supramundana; et Problema ex Actis Eruditorum desumptum proposuit ab Analystis Anglis solvendum. Quæ omnia ad rem nil spectant.* * Conti.

Sed et Consessum a Regia Societate constitutum, qui Commercium ex antiquis monumentis ediderant, accusavit quasi partibus studuissent, et Literas antiquas edendo omisissent omnia quæ vel pro ipso vel contra Newtonum *fecerent. Et ut hoc probaret, scripsit is in prima sua ad Abbatem epistola, quod in secundo suo in Angliam itinere,* Collinius *ostenderit ipsi partem Commercii sui, in qua* Newtonus *agnoscebat ignorantiam suam in pluribus, dicebatque (inter alia) quod nihil invenisset circa dimensiones Curvilinearum quæ celebrantur præter dimensionem Cissoidis: sed Consessus hoc totum suppressit. Et* Newtonus *in Epistola sua ad dictum Abbatem* 26 Feb. $17\frac{15}{16}$ *data, respondit: Hoc non fuisse omissum, sed extare in Epistola sua ad* Oldenburgum 24 Octob. 1676 *missa, et impressum fuisse in Commercio Epistolico** pag. 74. lin. 10, 11. *Et subinde* Leibnitius *in proxima sua ad Abbatem illum Epistola* Apr. 9, 1719 *data, agnovit* se errasse. Sed, *inquit,* exemplum dabo aliud. *Newtonus* in una Epistolarum ejus ad *Collinium* agnovit, se non posse invenire magnitudinem sectionum secundarum (vel segmentorum secundorum) sphæroidum et corporum similium: sed Consessus hunc locum vel hanc Epistolam minime edidit. Newtonus *autem in Observationibus quas in hanc* Leibnitii *Epistolam scripsit, respondit: Si Consessus hoc omisisset, recte omnino omissum fuisse, cum*

* Id est No LVIII. ad figuram

hujusmodi cavillationes ad Quæstionem de qua agitur nil spectent : sed Consessum hoc minime omisisse. Collinius *in Epistola ad D.* Gregorium 24 Decem. 1670, *ut et in altera ad D.* Bertet 1671 (*utrisque impressis in Commercio,* † p. 24, 26.), *scripsit quod Methodus* Newtoni *se extenderet ad secunda solidorum segmenta quæ per rotationem generantur. Et* Oldenburgus *idem scripsit ad* Leibnitium *ipsum* 8 Dec. 1674, *ut videre est in Commercio* † pag. 39. Leibnitius *igitur iterum erravit. Nam et in Transactionibus Philosophicis pro* Jan. *et* Feb. 1718, pag. 925, *dicitur quod Abbas de Comitibus* per horas aliquot inspexit Epistolas antiquas et Libros Epistolarum in Archivis R. Societatis asservatos, ut aliquid inveniret quod vel pro *Leibnitio* vel contra *Newtonum* faceret, et in Commercio Epistolico omissum fuisset; sed ejus generis nihil invenire potuit.

† Id est N° XIX, XXI.

† Id est N° XXXII.

Insuper D. Leibnitius, *ut Commercium Epistolicum sine responso dimitteret, in prima sua ad Abbatem de Comitibus Epistola dixit, eos qui contra ipsum scripsissent (id est Consessum a Regia Societate constitutum) candorem ejus aggressos esse per interpretationes duras et male fundatas, et voluptatem non habituros esse videndi responsa ejus ad pusillas rationes eorum qui iis tam male utuntur. Interpretationes illæ nullius quidem sunt auctoritatis, nisi quam ab Epistolis derivant, sed male fundatas esse* Leibnitius *nunquam ostendit.*

Subinde vero Newtonus, *qui ægre adductus est ut scriberet, in prima sua ad Abbatem Epistola* 26 *Feb.* 171$\frac{5}{6}$ *ita rescripsit.* D. *Leibnitius* hactenus respondere recusavit, bene intelligens impossibile esse res factas refutare. Silentium suum hac in re excusat, prætexens se librum nondum vidisse, et otium illi non esse ad examinandum, sed se orasse Mathematicum celebrem ut hoc negotium in se susciperet. — Utitur et novo prætextu ne respondeat, dicens quod Angli voluptatem non habebunt videndi responsa ejus ad pusillas eorum rationes, et proponens disputationes novas Philosophicas ineundas et problemata solvenda: quæ duo ad rem nil spectant. *D.* Leibnitius *autem in proxima sua ad Abbatem Epistola* 9 Apr. 1716 *data pergebat se excusare ne respondeat.* Ut operi, *inquit,* contra me edito sigillatim respondeam, opus erit alio opere non minore quam hoc est; percurrendum erit corpus magnum minutorum ante annos 30 vel 40 præteritorum, quorum perparvum reminiscor; examinandæ erunt veteres Epistolæ, quarum plures sunt perditæ, præterquam quod maxima ex parte non conservavi minuta mearum, et reliquæ sepultæ sunt in maximo chartarum acervo, quem non possum sine tempore et patientia discutere. Sed otium mihi minime suppetit aliis negotiis alterius prorsus generis occupato. *Et paulo post:* Literas truncare non debuerunt. Nam parvum est inter chartas meas vel cujus minuta mihi

relinquuntur. Sic omnibus perpensis, videns tantas malignitatis et fallaciæ notas, credidi indignum esse me ingredi discussionem cum hominum genere qui se tam male gerunt. Sentio quod in iis refutandis difficile fuerit ab opprobriis et expressionibus asperis abstinere, talibus quas eorum facta merentur, et non cupio hujusmodi spectaculum exhibere publico, in animo habens tempus meum melius impendere, quod mihi pretiosum esse debet, et contemnens judicium eorum qui super tali opere sententiam contra me pronunciare vellent; præsertim cum Societas Regia hoc facere noluit. *Hæc* Leibnitius. *Quæstionem priorem deserit rixando, et Quæstiones novas proponit.*

Attamen post ejus mortem (quæ contigit proximo Mense Novembris) *in Elogio ejus quod in Actis Eruditorum pro Mense* Julio *Anni* 1717 *impressum fuit, amici ejus scripserunt* eum Commercio Epistolico Anglorum quoddam suum idemque amplius opponere decrevisse : et paucis ante obitum diebus Cl. *Wolfio* significasse se Anglos famam ipsius lacessentes reipsa refutaturum. Quamprimum enim a laboribus historicis vacaturus sit, daturum se aliquid in Analysi prorsus inexpectatum, et cum inventis quæ hactenus in publicum prostant, sive *Newtoni*, sive aliorum, nihil quicquam affine habens. *Hæc illi. Verum ex jam dictis patet illum non aliud habuisse Commercium Epistolicum quod ederet. Et inventum novum his nihil affine habens ad rem nihil spectat. Missis ægrorum somniis, Quæstio tota ad Epistolas antiquas referri debet.*

Initio secundæ ad Abbatem de Comitibus Epistolæ, D. Leibnitius *primam* Newtoni *Epistolam vocavit* speciem chartæ provocatoriæ ex parte *Newtoni*, *dein addidit:* In arenam descendere nolui contra ejus milites emissarios, sive intelligas Accusatorem supra fundamentum Commercii Epistolici, sive Præfationem spectes acrimoniæ plenam, quam alius quidam novæ Principiorum editioni præmisit : Sed cum is per se jam lubens apparebit, paratus sum ipsi satisfactionem dare. *Et* Newtonus *respondit*, D. *Leibnitium* literas et chartas antiquas seponere, et ad Quæstiones circa philosophiam et res alias confugere. Et magnum illum Mathematicum, cui sine nomine ut Judici Epistolam 7 *Jun.* 1713 datam attribuerat, jam ut advocatum in hac rixa pro se inducere, mathematicos in Anglia provocantem [*uti fingitur*] ad problemata solvenda; quasi Duellum [*cum* Leibnitio *scilicet*] vel forte prælium cum exercitu discipulorum ejus [*quos jactat*] methodus esset magis idonea ad veritatem dirimendam, quam discussio veterum et authenticorum scriptorum, et Mathesis factis heroicis vice rationum ac demonstrationum abhinc implenda esset. *Hic rationes ac demonstrationes alludunt ad argumenta e scriptis veteribus desumpta, et facta heroica ad contentiones phi-*

losophicas et problematicas ad rem nil spectantes, ad quas D. Leibnitius *a prioribus aufugit.*

Quæ novæ Principiorum editioni præmissa sunt, Newtonus *non vidit antequam Liber in lucem prodiit. Quæ de Quæstionibus Philosophicis disputata sunt D.* Des Maizeaux* *a D.* Leibnitio *et aliis accepit et in lucem edidit. Solutiones Problematum maxima ex parte lucem viderunt in Actis Eruditorum. Hæc omnia ad rem nil spectant. Commercii Epistolici exempla tantum pauca impressa fuerunt, et ad Mathematicos missa qui de his rebus judicare possent, neque prostant venalia. Ideoque hunc Librum, ut et ejus Recensionem quæ in Transactionibus Philosophicis ac Diario Literario, anno* 1715 *(anno et septem vel octo mensibus ante obitum D.* Leibnitii*) impressa fuit, iterum imprimere visum est, ut historia vera ex antiquis monumentis deducta, missis disputationibus quæ ad rem nil spectant, ad posteros perveniat, et sic finis imponatur huic controversiæ. Nam D.* Leibnitius *a Quæstione desciscens emortuus est, et judicium posteris relinquitur.*

Denique Judicium primarii Mathematici subjunctum est, unà cum Notis quibus pateat, eidem in Recensione prædicta, vivente Leibnitio, *responsum esse, et scopum ejus fuisse tantum, ut Commercium Epistolicum sine Responso dimitteretur.*

---

* Vide Epistolas D. *Leibnitii* ad D. *Des Maizeaux* 21 *Aug.* 1716, et D. *Des Maizeaux* ad Abbatem de Comitibus 21 *Aug.* 1718, in Collectionum Tomo secundo, *pag.* 356, et 362 impressas.

RECENSIO LIBRI

Qui inscriptus est *Commercium Epistolicum Collinii et aliorum de Analysi Promota*, et publicatus est jussu Regiæ Societatis Londinensis, circa controversiam inter D^num *Leibnitz et* D^num *Keill*, de primo inventore *Methodi Fluxionum*, sive, ut nonnulli appellant, *Methodi Differentialis:* Anglice primum Edita in Actis Regiæ Societatis, A. D. 1715, et Gallice eodem anno in Diario Literario Tom. VII. nunc ex Anglico in Latinum versa.

Cum variæ *Relationes* apud Exteros de Commercio hoc publicatæ sint, mutilæ omnes et imperfectæ, visum est ut plenior hæc, quæ sequitur, Recensio in publicum edatur.

Commercium hoc contextum est ex variis Epistolis Chartisque, in Archivis *Regiæ Societatis* repositis; quæ singulæ hic suo ordine ac serie collocantur, et vel ex Latinis fideliter transcriptæ sunt, vel ex Anglicis fideliter in Latinum translatæ: numeroso Consessu a *Regia Societate* deputato, ut et Literæ Originales inspicerentur, et earum exemplaria examinarentur. Cæterum hæc, de qua agitur, est *Methodus* generalis resolvendi finitas æquationes in infinitas, et applicandi Æquationes illas, tam finitas quam infinitas, ad solutionem Problematum, per methodum *Fluxionum* et *Momentorum*. Primo autem disseremus de ea Methodi parte, quæ consistit in resolvendo Finitas æquationes in infinitas, et ea ratione quadrando figuras Curvilineas. Per infinitas æquationes intelliguntur illæ, quæ involvunt Seriem Terminorum convergentium et ad veritatem propius propiusque accedentium *in infinitum;* ita ut postremo a veritate distent minus ulla data quantitate; et, si *in infinitum* continuentur, nullam omnino differentiam relinquant.

Wallisius in *Opere* suo *Arithmetico*, publicato A. D. 1657. Cap. 33. Prop. 68. reduxit fractionem $\frac{A}{1-R}$ per perpetuam Divisionem in seriem $A + AR + AR^2 + AR^3 + AR^4 +$ etc.

Vicecomes *Brounker* quadravit Hyperbolam per hanc seriem $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} + \frac{1}{7\times 8} +$ etc. hoc est per hanc, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} +$ etc.

conjungendo singulos binos Terminos in unum. Et hæc Quadratura publicata est in Actis Regiæ Societatis, mense Aprili 1668.

Paulo post Dominus *Mercator* evulgavit Demonstrationem hujus Quadraturæ per Divisionem Domini *Wallisii*; et deinceps haud multo post *Jacobus Gregorius* Geometricam ejusdem Demonstrationem in lucem edidit. Hi Libelli, paucis postquam editi sunt mensibus, Cantabrigiam missi sunt ad Dominum *Barrovium* per Dominum *Johannem Collins*; et per *Barrovium* traditi *Isaaco Newtono* tunc Cantabrigiæ degenti, utpote Collegii S. Trinitatis Socio (nunc autem *Londini* Equiti Aurato), mense *Junio* 1669. Hac occasione, *Barrovius* vicissim *Collinio* misit Tractatum *Newtoni*, qui inscribe-
Commerc. Epist. N° I. batur *Analysis per æquationes numero terminorum infinitas*. Is Tractatus in *Commercio Epistolico* agmen ducit, continetque universalem Methodum id in omnibus Figuris faciendi, quod Vicecomes *Brounker* et *Mercator* in sola Hyperbola fecerant. Porro *Mercator* per annos sexdecim adhuc superstes, nihil tentavit aut progressus est ultra solam illam *Hyperbolæ* quadraturam. Illa vero *Newtoni* per *omnes Figuras* progressio satis ostendit, nihil eum in ea re Mercatoris opera aut ope indiguisse. Ne tamen litiget quisquam aut cavilletur, concedit *Newtonus* et *Brounkerum* invenisse, et *Mercatorem* demonstrasse, seriem illam pro *Hyperbola* quadranda, annos prius aliquot quam in publicum ederent; et proinde prius quam *Newtonus* generalem suam Methodum invenisset.

De Tractatu isto qui inscribitur *Analysis* etc. *Newtonus* in Epistola ad
Ib. N° LVII. *Oldenburgum* missa, dataque 24 Octob. 1676, hæc verba habet, quæ sequuntur: « *Eo ipso tempore quo Mercatoris Logarithmotechnia prodiit, communicatum est per amicum D.* Barrow (*tunc* Matheseos *Professorem* Cantab.) *cum D.* Collinio *compendium quoddam harum serierum, in quo significaveram Areas et Longitudines curvarum omnium, et solidorum superficies et contenta ex datis rectis; et vice versa ex his datis Rectas determinari posse; et Methodum indicatam illustraveram diversis seriebus.* » Hujus porro serierum compendii certiores fecit *Collinius Jacobum Gregorium* Scotum,
Ib. N° XIV, XIX, XXI, XXII, XXIII, XXIV Dominos *Bertet et Vernon* apud Gallos, *Alphonsum Borellum* Italum, Dominos *Strode, Townsend, Oldenburg, Dary*, aliosque apud Anglos, variis Epistolis datis Ann. 1669, 1670, 1671 et 1672, ut ipsæ Epistolæ adhuc testantur. Ipse præterea *Oldenburgus* communicavit eandem *Analysin* cum D. *Francisco Slusio* Leodii tum agente, et ex ea aliquot ῥήσεις citavit;
Ib. N° XIII. literis datis 14 Sept. 1669, et in Librum Regiæ Soc. Epistolarem trans-
Ib. N° XIV. criptis. Porro *Collinius* in Ep. ad *Jac. Gregorium*, 25 Novemb. 1669, sic de Methodo in *Analysi* illa contenta loquitur :

« *Barrovius* provinciam suam publice Prælegendi remisit cuidam nomine « *Newtono* Cantabrigiensi; cujus, tamquam Viri acutissimo ingenio prædito, in Præfatione Prælectionum Opticarum meminit. Quippe antequam « ederetur *Mercatoris* Logarithmotechnia, eandem Methodum adinvenerat, « eamque ad omnes Curvas generaliter et ad Circulum diversimode applicarat. » Literis vero ad D. *Davidem Gregorium* datis 11 Aug. 1676. his verbis de ea loquitur: « Paucos post menses quam editi sunt hi Libri (viz. « *Mercatoris* Logarithmotechnia, et Exercitationes Geometricæ *Gregorii*) « missi sunt ad *Barrovium* Cantabrigiæ. Ille autem responsum dedit, hanc « Infinitarum Serierum doctrinam a *Newtono* biennium ante excogitatam « fuisse, quam ederetur *Mercatoris* Logarithmotechnia, et generaliter omnibus figuris applicatam, simulque transmisit D. *Newtoni* opus Manuscriptum. » Horum autem Librorum posterior prodiit circa finem anni 1668; *Barrovius* vero dictum Serierum *Compendium Collinio* misit, Julio insequente, ut ex tribus ejus Epistolis constat. *Collinius* porro, in literis ad D. *Strode* 26 Julii 1672. sic de eo *Compendio* scribit: « Exemplar ejus (Logarithmotechniæ) misi *Barrovio* Cantabrigiam, qui quasdam *Newtoni* « Chartas extemplo remisit; e quibus, et aliis quæ prius ab Auctore cum « *Barrovio* communicatæ fuerant, patet illam Methodum a dicto *Newtono* « aliquot annis antea excogitatam, et modo universali applicatam fuisse. « Ita ut ejus ope in quavis figura Curvilinea proposita, quæ una vel « pluribus Proprietatibus definitur, Quadratura vel Area dictæ figuræ, « accurata si possibile sit, sin minus infinite vero propinqua; Evolutio vel « Longitudo lineæ Curvæ, centrum gravitatis figuræ, solida ejus rotatione « genita et eorum superficies, sine ulla Radicum Extractione obtineri queant. « Postquam intellexerat D. *Gregorius* hanc methodum a D. *Mercatore* « in Logarithmotechnia usurpatam, et Hyperbolæ quadrandæ adhibitam, « quamque adauxerat ipse *Gregorius*, jam universalem redditam esse, omnibusque figuris applicatam, acri studio eandem acquisivit, multumque in « ea enodanda desudavit. Uterque, D. *Newtonus* et *Gregorius*, in animo habet « hanc methodum exornare: D. *Gregorius* autem D. *Newtonum* primum « ejus inventorem anticipare haud integrum ducit. » In alia vero Epist. ad *Oldenburgum* scripta et cum D. *Leibnitio* communicanda, dataque 14 *Jan.* 1676, hæc memorat *Collinius*: « Hujus autem Methodi ea est præstantia, « ut, cum tam late pateat, ad nullam hæreat difficultatem. *Gregorium* « autem aliosque in ea fuisse opinione arbitror, ut quicquid uspiam antea « de hac re innotuit, quasi dubia diluculi lux fuit, si cum meridiana claritate conferatur. »

Ib. N° XLVII.
Ib. N° I.
Ib. N° XXIV.
Ib. N° XLV.

2.

A. C. 1710 Porro hic *Newtoni* Tractatus primum typis editus est a D. *Gulielmo Jones*, qui Apographum ejus repperit in scriniis *Collinii*, ipsius manu scriptum; et postea cum Originali contulit a D. *Newtono* mutuato. Continet autem prædictam generalem Methodum *Analyseos*, monstrantem quomodo resolvendæ sunt finitæ Æquationes in infinitas; utque per Methodum Momentorum applicandæ sunt Æquationes tam finitæ quam infinitæ ad omnium Problematum solutionem. Incipit vero, ubi finem fecit *Wallisius*, et methodum Quadraturarum super tres Regulas struit.

Wallisius, Anno 1655, *Arithmeticam* suam *Infinitorum* in lucem dedit; per cujus libri Propositionem LIX, si Abscissa cujusvis Curvilinearis figuræ vocetur X, et *n* atque *m* sint Numeri, et Ordinatæ, ad rectos angulos erectæ,

Com. Epist. N° II sint $X^{\frac{m}{n}}$; Area figuræ erit $\frac{n}{m+n} X^{\frac{m+n}{n}}$. Atque hoc assumitur a D. *Newtono*, tamquam prima Regula, super quam fundat suam curvarum Quadraturam. *Wallisius* autem propositionem hanc demonstravit gradatim, per multas particulares propositiones; tandemque omnes in unam collegit per Tabulam Casuum. *Newtonus* vero omnes casus in unum reduxit, per Dignitatem cum indefinito Indice: et sub extremo *Compendii*, semel simulque demonstravit per Methodum suam Momentorum; primusque indefinitos dignitatum Indices in Operationes Analyseos introduxit.

Ceterum per 108 Propositionem *Arithmeticæ Infinitorum* Wallisii, perque plures alias propositiones quæ sequuntur: Si ordinata composita fuerit ex duabus vel pluribus ordinatis cum signis suis + et — acceptis, Area composita erit ex duabus vel pluribus areis cum signis suis + et — acceptis

Ib. N° III. respective. Atque hoc a D. *Newtono* assumitur, tamquam Regula secunda, super quam instituit suam Quadraturarum methodum.

Ib. N° IV. Tertia vero Regula est, ut reducantur Fractiones et Radicales, et affectæ Radices Æquationum in Series Convergentes, cum Quadratura non aliter succedat: et ut per Regulas primam ac secundam quadrentur figuræ,

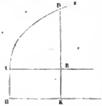
Ib. N° XLVIII quarum Ordinatæ sunt singuli Termini Serierum. *Newtonus*, in Ep. ad *Oldenburgum* scripta 13 *Jun.* 1676, et *Leibnitio* transmissa, modum docuit reducendi quamlibet dignitatem cujuslibet Binominalis in seriem Convergentem, et per eam seriem quadrandi curvam, cujus ordinata est

Ib. N° LV. illa Dignitas. Et a D. *Leibnitio* rogatus, ut fontem hujus Theorematis explicare vellet, rescripsit per Epistolam datam 24 *Octob.* 1676, se paulo ante Pestem, quæ Londini grassabatur anno 1665, cum legeret Arithmeticam infinitorum *Wallisii*, cogitaretque de interpolenda serie x, $x - \frac{1}{3}x^3$, $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$, $x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$, etc. invenisse Aream Circuli

esse $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9}$ — etc. et persequendo methodum interpolationis, se prædictum Theorema excogitasse; atque ejus ope Reductionem Fractionum et surdarum in series convergentes, per Divisionem et Radicum Extractionem invenisse; ac tum ad Affectarum Radicum Extractionem perrexisse. Atque hæ Reductiones Regula sunt Tertia. Ib. N° IV

Cum in hoc serierum Compendio trinas has Regulas explicuisset *Newtonus*, variisque exemplis eas illustrasset, designavit is Ideam deducendi Aream ex Ordinata, considerando Aream tamquam Quantitatem nascentem et augescentem sive crescentem per fluxionem continuam, in proportione Longitudinis Ordinatæ, et supponendo Abscissam uniformiter crescere in proportione ad Tempus. Atque ex Momentis Temporis, nomen *Momentorum* indidit momentaneis augmentis, sive partibus Areæ atque Abscissæ infinite parvis, quæ in Momentis temporis generantur. Momentum Lineæ punctum vocavit, ex mente *Cavallerii;* quamvis non sit punctum Geometricum, sed Lineola infinite brevis: Momentum autem Areæ vel superficiei vocavit Lineam, secundum eundem *Cavallerium;* licet non sit Linea Geometrica, sed superficies Latitudine infinite exili. Cumque ordinatam consideraret tamquam Momentum Areæ, eo nomine intellexit Rectangulos sub Geometrica Ordinata et Momento Abscissæ; licet illud Momentum non semper exprimatur. *Sit* ABD, inquit, *Curva quævis, et* AHKB *rectangulum, cujus latus* AH *vel* KB *est unitas. Et cogita rectam* DBK *uniformiter ab* AH *motam areas* ABD *et* AK *describere; et quod* [recta] BK (1) *sit momentum quo* [area] AK (x) *et* [recta] BD (y) *momentum quo* [curvilinea] ABD *gradatim augetur; et quod ex momento* BD *perpetim dato, possis, per præcedentes* [tres] *Regulas, aream* ABD *ipso descriptam investigare, sive cum area* AK (x) *momento* 1, *descripta conferre.* Hæc *Newtoni* Idea est operationis in curvis quadrandis: quoque modo hanc ad alia Problemata applicet, in verbis proxime sequentibus monstrat: *Jam,* inquit, *qua ratione superficies* ABD *ex momento suo perpetim dato per præcedentes* [tres] *Regulas elicitur, eadem quælibet alia quantitas ex momento suo sic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior.* Ceterum post aliquot exempla, methodum addit regressionis ab area, arcu, solidove contento ad abscissam; docetque ut eadem methodus extendat se ad Curvas Mechanicas, determinando earum Ordinatas, Tangentes, Areas, Longitudines, etc. Utque assumendo quamvis Æquationem exprimentem relationem inter aream abscissamque curvæ, per hanc

Com. Ep. N° X.



Ib. N° X XII.

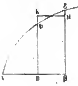
methodum invenias ordinatam. Atque hoc est fundamentum methodi fluxionum et momentorum, quod *Newtonus* in Literis datis 24 *Octob.* 1676 hac sententia comprehendit, *Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, invenire fluxiones, et vice versa.*

C. Nº X. XII In hoc *Compendio* uniformem fluxionem temporis vel cujusvis exponentis temporis per unitatem repræsentat *Newtonus;* Momentum autem temporis vel exponentis sui per literam *o*; fluxiones vero aliarum quantitatum per quævis alia symbola; ac momenta earum quantitatum per Rectangulos sub illis symbolis et litera *o;* aream porro curvarum per ordinatam in Quadrato inclusam; area pro fluente, et ordinata pro ejus fluxione positis. Cum autem Propositionem aliquam demonstrat; literam o adhibet pro finito momento Temporis vel ejus exponentis, aut cujusvis quantitatis uniformiter fluentis; totamque calculationem absolvit per Geometriam veterum in finitis figuris sive schematibus sine ulla approximatione: et cum primum Calculatio peracta est, et Æquatio reducta, supponit momentum *o* decrescere *in Infinitum* atque evanescere. Cum vero non demonstrat, sed solum investigat Propositionem; quo citius rem conficiat, supponit momentum *o* esse infinite parvum, et in scribendo illud negligit, omnibusque approximationum modis utitur, quos nullum in conclusione errorem parituros autumat. Com. Ep. Nº XII. Prioris generis specimen habes sub finem *Compendii*, ubi primam trium illarum regularum, quas initio libri posuerat, erat demonstraturus. Secundi generis exempla ibidem habes, cum invenit Curvarum Linearum Longitudinem *p.* 15, et cum eruit ordinatas, Areas, et Longitudines Curvarum Mechanicarum *p.* 18, 19: narratque, qua via per eandem methodum Tangentes duci possint ad Curvas Mechanicas, *p.* 18. Atque in Epist. data Ib. Nº XXVI. 10 *Decemb.* 1672 addit, Problemata de Curvatura Curvarum seu Geometricarum sive Mechanicarum per eamdem methodum solvi. Ex quibus manifestum est se jam tum suam Methodum ad secunda ac tertia momenta extendisse: cum enim Areæ Curvarum considerantur tamquam fluentes (ut in hac *Analysi* fieri solet) ordinatæ exprimunt fluxiones primas; Tangentes autem datæ sunt per fluxiones secundas, et Curvaturæ per tertias. Et vel in *Analysi* hac, p. 15, ubi *Newtonus* ait, *Momentum est superficies, cum de solidis; et Linea, cum de superficiebus; et punctum, cum de Lineis agitur;* perinde est ac si dixisset, cum solida considerantur tamquam fluentia, eorum Momenta superficies sunt, et eorum momentorum momenta (vel secunda Momenta) Lineæ sunt; et horum Momentorum Momenta (sive tertia Momenta) puncta sunt, secundum sententiam *Cavallerii*: atque in *Principiis* suis *Philosophiæ*, ubi frequenter considerat Lineas tamquam fluentes a

Punctis descriptas, quorum velocitates crescunt vel decrescunt; velocitates sunt fluxiones primæ, et earum incrementa secundæ. Ac Problema illud, *Data Æquatione fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire et vice versa*, ad fluxiones omnes pertinet; ut constat ex solutionis ejus Exemplis a *Wallisio* publicatis, Tom. II operum suorum, p. 391, 392, 396. Quin et in Lib. II *Principiorum Philosophiæ*, Prop. XIV. Differentiam secundam *Newtonus* appellat *Differentiam Momentorum*.

Quòque melius intelligas, quo calculationis genere *Newtonus* usus fuerit Anno 1669, vel ante, cum hoc *Analyseos* suæ Compendium scripsit; ponam hic ejus demonstrationem primæ illius Regulæ supra memoratæ. N° XII.

« Sit Curvæ alicujus ADδ Basis AB $= x$, perpendiculariter applicata



« BD $= y$, et area ABD $= z$, ut prius. Item sit B$\beta = o$, « BK $= v$, et Rectangulum BβHK (ov) æquale spatio « B$\beta\delta$D.

« Est ergo A$\beta = x + o$, et A$\delta\beta = z + ov$. His præ- « missis, ex relatione inter x et z ad arbitrium assumpta « quæro y ut sequitur. Pro lubitu sumatur [æquatio] « $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = z$, sive $\frac{4}{9} x^3 = zz$. Tum $x + o$ (Aβ) pro x, et $z + ov$ (A$\delta\beta$) pro z « substitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3 + 3xxo + 3xoo + o^3 =$ (ex natura Curvæ) « $z^2 + 2zov + o^2v^2$. Et sublatis $\frac{4}{9}x^3$ et zz æqualibus, reliquisque per o di- « visis, restabit $\frac{4}{9}$ in $3x^2 + 3xo + o^2 = 2zv + ov^2$. Si jam supponamus B$\beta$ « in infinitum diminui et evanescere, sive o esse nihil, erunt v et y æquales, « et termini per o multiplicati evanescent; ideoque restabit $\frac{4}{9} \times 3xx = 2zv$, « sive $\frac{2}{3}xx$ $(= zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, sive $x^{\frac{1}{2}} \left(= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = y$. Quare e contra, si $x^{\frac{1}{2}} = y$, « erit $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = z$.

« Vel generaliter, si $\frac{n}{m+n} \times ax^{\frac{m+n}{n}} = z$: sive ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, et « $m + n = p$; si $cx^{\frac{p}{n}} = z$, sive $c^n x^p = z^n$; tum $x + o$ pro x, et $z + ov$ « sive (quod perinde est, $z + oy$) pro z, substitutis, prodit c^n in $x^p + pox^{p-1}$, « etc. $= z^n + noyz^{n-1}$, etc. reliquis nempe [serierum] terminis, qui tandem « evanescerent, omissis. Jam sublatis $c^n x^p$ et z^n æqualibus, reliquisque per o

« divisis, restat $c^n p x^{p-1} = nyz^{n-1} \left(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}} \right)$ sive dividendo per
« $c^n x^p$, erit $px^{p-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$, sive $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; vel restituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c,
« et $m+n$ pro p, hoc est, m pro $p-n$, et na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare
« e contra si $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D. »

Eadem operandi ratione, etiam Regula secunda demonstrari potest. Et si quælibet Æquatio assumatur, Relationem exprimens inter Abscissam et Aream, ordinata inveniri poterit eadem ratione; ut in proximis *Analyseos* verbis indicatur. Et si illa ordinata in unitatem ducta pro Area novæ Curvæ ponatur, novæ illius Curvæ ordinata eâdem methodo inveniri potest; atque ita in perpetuum. Hæque ordinatæ primam, secundam, tertiam, quartam, sequentesque Fluxiones primæ Areæ repræsentant.

Hæc *Newtoniana* fuit operandi methodus, eo tempore quo Compendium illud suæ *Analyseos* scripsit : eâdemque methodo usus est in Libro *Quadraturarum*, atque in hunc usque diem adhuc utitur.

In exemplis, quibus methodum Serierum et Momentorum in *Compendio*
N° X hoc illustrat, hæc sunt : Esto Radius Circuli 1, Arcus z, Sinus x; Æquationes pro inveniendo Arcu cujus Sinus est datus, et Sinu cujus Arcus est datus, erunt

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \text{etc.}$$
$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{36288}z^9 - \text{etc.}$$

N° XIV, Hujus methodi notitiam *Collinus Gregorio* dedit sub autumno anni 1669;
XVIII, XX. ac *Gregorius*, ope unius ex seriebus *Newtonianis*, post integrum annuum laborem, methodum demum invenit *Decembri* 1670 : et bimestri post tempore, in Epistola data 15 *Feb.* 1671, varia Theoremata per eam reperta *Collinio* misit, datâ etiam communicandi licentiâ. *Collinius* autem facillimus erat ad communicandum quæcunque vel à *Newtono* vel *Gregorio* accepisset; ut patet ex Epistolis in hoc *Commercio* jam publicatis. In seriebus, quas in dicta Epistola misit *Gregorius*, hæ duæ sunt : Esto Radius Circuli r, Arcus a, et Tangens t; Æquationes pro inveniendo Arcu cujus Tangens data est, et Tangente cujus Arcus datus est, erunt hæ,

$$a = t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \text{etc.}$$
$$t = a + \frac{a^3}{3rr} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{5r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} + \text{etc.}$$

Eo ipso Anno 1671 D. *Leibnitius* duos Tractatus edidit *Londini*; unum Societati Regiæ, alterum Academiæ Scientiarum *Parisiensi* dedicatum; et in prioris Dedicatione commercium suum Epistolare cum D. *Oldenburgo* memorat.

Mense Feb. $167\frac{2}{3}$, cum in ædibus D. *Boyle* *Leibnitius* in D. *Pellium* incidisset, sibi arrogare visus est Differentialem Methodum *Moutoni*: cumque *Pellius* ostendisset Methodum illam non novam esse, sed *Moutoni*; perstitit nihilominus *Leibnitius* in vindicanda sibi Inventione illa, præ se ferens, suo se Marte invenisse, *Moutoniani* operis ignarum, multumque eam promovisse. N° XXX.

Cum *Newtoni* serierum una *Gregorio* missa esset, tentavit ille eam deducere ex seriebus suis inter se combinatis; ut ipse in Epistola narrat data 19 Decemb. 1670. Ac per similem aliquam Methodum *Leibnitius*, prius-quam *Londino* discederet, repperisse videtur summam seriei Fractionum decrescentium in Infinitum, quarum Numerator est Numerus datus, Denominatores autem sunt triangulares vel pyramidales vel triangulo-triangulares, etc. Ingens vero Mysterium! De serie $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+$ etc. subduc omnes Terminos præter primum, et remanebit N° XXX.

$$1\ (=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}-\text{etc.})$$

$$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\text{etc.}$$

Et ab hac serie deme omnes Terminos, excepto primo, et remanebit

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{1\times2\times3}+\frac{2}{2\times3\times4}+\frac{2}{3\times4\times5}+\frac{2}{4\times5\times6}+\text{etc.}$$

Et à priore serie deduc omnes Terminos præter duos primos, et remanebit

$$\frac{3}{2}=\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{2\times4}+\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{4\times6}+\text{etc.}$$

Sub finem Febr. vel initium Martii, $167\frac{2}{3}$, *Leibnitius* Londino relicto Parisios se contulit, et ad usque mensem Junium sequentem commercium cum *Oldenburgo* habuit, deinde Algebram et Geometriam sublimiorem didicit, et mense Julio anni 1674 Commercium cum *Oldenburgo* renovavit, scribens se mirificum habere Theorema, quod daret Circuli vel ejus Sectoris cujuscumque Aream accuratè in serie numerorum rationalium; Octobri autem insequente scripsit, se invenisse Circumferentiam Circuli in serie simplicissimorum numerorum; et eadem *Methodo* (sic enim Theorema illud nominat) quemvis Arcum cujus sinus datus sit posse inveniri in simili serie, N° XXXI. N° XXXII.

tutum in aliquibus mutare cogerer. 5accdæ10effh etc. id est: *Una Methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cætera commode derivari possunt; et in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis ad eruendos terminos assumptæ seriei.*

Ex duabus his *Newtoni* Epistolis certo constat, jam tum vel potius ante quinquennium invenisse illum Reductionem Problematum ad Æquationes fluxionales et Series Convergentes: et ex Responso *Leibnitii* ad harum Epistolarum priorem, æque certum est tum nondum hunc invenisse Reductionem Problematum vel ad Æquationes Differentiales vel ad Series Convergentes.

Idque amplius ex eis manifestum est, quæ de hac re scripsit *Leibnitius* anno 1691 in *Actis Eruditorum*: *Jam anno* 1675, inquit, *compositum habebam opusculum Quadraturæ Arithmeticæ ab amicis ab illo tempore lectum, sed quod, materia sub manibus crescente, limare ad Editionem non vacavit, postquam aliæ occupationes supervenere; præsertim cum nunc prolixius exponere vulgari more quæ Analysis nostra* (1) *paucis exhibet, non satis operæ pretium videatur.* Hanc Quadraturam *vulgari more* compositam proferre cœpit *Parisiis* anno 1675, Anno proximo Demonstrationem ejus expoliebat, *Oldenburgo* mittendam, seu Methodi *Newtonianæ* ἀντάλλαγμα, ut narrat in Epistola 12 Maii 1676: et proinde in Epistola 27 Aug. 1676 eam misit contextam et Edolatam *more vulgari*. Hieme insequente, in Germaniam reversus per Angliam et Hollandiam, ut negotia publica capesseret, non vacavit amplius ad eam prælo parandam, nec operæ pretium existimavit, ea more vulgari prolixius explicare, quæ *Analysis* ejus paucis exhibet. Hanc ergo novam Analysin excogitavit, jam in Germaniam reversus, et proinde non ante annum 1677. N° XXXVIII. N° XLIV.

Idque amplius adhuc constat ex consideratione sequenti. *Barrovius* Methodum suam Tangentium anno 1670 in lucem edidit. Inde *Gregorius* Methodum Tangentium hausit absque computatione, uti ad *Collinium* scripsit 5 Sept. 1670. *Newtonus* autem suam Tangentium cum *Collinio* communicavit anno 1672, in Epistola 10 Decemb. data, atque hæc ibi addidit. *Hoc est unum particulare, vel Corollarium potius Methodi generalis, quæ extendit se, citra molestum ullum calculum, non modo ad ducendum Tangentes ad quasvis Curvas, sive Geometricas, sive Mechanicas, vel quomodocunque rectas Lineas aliasve Curvas respicientes; verum etiam ad resolvendum alia abstrusiora Problematum genera de Curvitatibus, Areis, Longitudinibus, Centris gravitatis Curvarum, etc. Neque (quemadmodum* Huddenii *methodus de Maximis et Minimis) ad solas restringitur æquationes illas, quæ quantitatibus surdis sunt immunes.* N° XVI. N° XXVI.

(1) *Nova*, desideratur. F. L.

ut cum usus eis fuerit, tibi ea remittat. Porro hæc Extracta ad *Leibnitium* missa fuisse, testis est ipse *Collinius*, in Epistola ad *Davidem Gregorium Jacobi* τῦ μακαρίτυ fratrem, data 11 Aug. 1676; idque amplius constat ex *Leibnitii Tschurnhausiique* Responsis.

Leibnitii Responsum, *Oldenburgo missum datumque* 27 Aug. 1676, sic
N° LI. incipit. *Literæ tuæ die Julij 26 datæ plura ac memorabiliora circa rem Analyticam continent quam multa volumina spissa de his rebus edita. Quare tibi pariter ac clarissimis viris* Newtono *ac* Collinio *gratias ago, qui nos participes tot meditationum egregiarum esse voluistis.* Et prope finem Epistolæ, postquam *New-*
N° LIII. *toniæ* Epistolæ contenta enarrasset, ita pergit: *Ad alia tuarum Literarum venio quæ doctissimus* Collinius *communicare gravatus non est. Vellem adjecisset appropinquationis Gregorianæ linearis demonstrationem. Fuit enim his certe studiis promovendis amplissimus.* Responsum vero *Tschurnhausii*, datum 1 Sept. 1676;
N° LIV. cum *Newtoni* de seriebus Epistolam commemorasset, his verbis concluditur: *Similia porro quæ hac in re præstitit eximius ille Geometra* Gregorius, *memoranda certe sunt. Et quidem optime famæ ipsius consulturi sunt, qui ipsius relicta manuscripta luci publicæ ut exponantur operam navabunt.* In priore Epistolæ parte, ubi de seriebus *Newtonianis* loquitur, se eas leviter percurrisse dicit, visurum si forte in eis inveniret *Leibnitii* seriem pro circulo Hyperbolâve quadrandis. Quod si in extractis *Gregorianarum* Epistolarum
N° XX. XLVI. eam inquisivisset, repperisset utique in Epistola 15 Feb. 1671, supra memorata. Quippe extracta illa, in quibus ea habetur Epistola, supersunt adhuc *Collinii* manuscripta.

Quamquam autem seriem illam, de qua agitur, jam bis ab *Oldenburgo*
N° LII. *Leibnitius* accepisset, illam ipsam tamen in Epistola data 27 Aug. 1676, velut suam *Oldenburgo* remisit, quasi munus ἀντάξιον pro Methodo *Newtoni*; præ se ferens, se jam triennio ante vel amplius amicis suis *Parisiensibus* eam ostendisse; hoc est, biennio prius quam eam accepisset in *Oldenburgi*
N° XXXVI. XXXVII. Epistola 15 Apr. 1675. Atqui illo tempore seriem illam suam esse nesciebat; uti constat ex ipsius Responso 20 Maii 1675, supra citato. Fieri quidem potuit, ut *Londini* eam acceperit, ac Amicis Parisiensibus ostenderit, triennio prius quam *Oldenburgo* eam remiserit: minime tamen constat, se ejus Demonstrationem tam mature nactum esse. Hanc ubi primum reppererat, tunc demum in *Opusculo* suo eam exhibuit, cumque amicis communicavit: idque ipse narrat contigisse anno 1675. Illud vero probandum et evincendum est, se prius eam penes se habuisse, quam ab *Oldenburgo* eam accepisset. Quippe in Responso suo ad *Oldenburgum*, nullam ex seriebus tunc missis suam esse sciebat; celabatque ab amicis Parisiensibus, se illam cum

pluribus aliis ab *Oldenburgo* accepisse, ac vidisse se *Gregorii* Epistolam, in qua is *Collinio* eam miserat, ineunte anno 1671.

In eadem Epistola, 27 Aug. 1676, postquam descripserat Quadraturam suam Circuli Hyperbolæque Æquilateræ, hæc addit *Leibnitius*: *Vicissim ex seriebus regressuum pro Hyperbola hanc inveni. Sit numerus aliquis unitate minor* 1 — m, *ejusque logarithmus Hyperbolicus* l. *Erit* N° LII.

$$m = \frac{l}{1} - \frac{l^2}{1\times 2} + \frac{l^3}{1\times 2\times 3} - \frac{l^4}{1\times 2\times 3\times 4} + \text{etc.}$$

Si numerus sit major unitate, ut 1 + n, *tunc pro eo inveniendo mihi etiam prodit Regula quæ in* Newtoni *Epistola expressa est: scilicet erit*

$$n = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1\times 2} + \frac{l^3}{1\times 2\times 3} + \frac{l^4}{1\times 2\times 3\times 4} + \text{etc.}$$

Quod regressum ex arcubus attinet, incideram ego directe in Regulam quæ ex dato arcu sinum complementi exhibet. Nempe sinus complementi

$$= 1 - \frac{a^2}{1\times 2} + \frac{a^4}{1\times 2\times 3\times 4} - \text{etc.}$$

Sed postea quoque deprehendi ex ea illam nobis communicatam pro inveniendo sinu recto, qui est $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1\times 2\times 3} + \frac{a^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} - \text{etc.}$ *posse demonstrari.*

In his verbis *Leibnitius* sibi laudem vindicat Coinventionis quatuor harum Serierum: quamvis Methodus eas inveniendi, ipso expetente, ad eum missa fuerit; quam tamen nondum intelligere nec comprehendere poterat: In eadem utique Epist. 27 Aug. 1676, orabat D. *Newtonum*, ut clarius eam explicaret. Verba ipsius sunt: *Sed desideraverim ut Clarissimus* Newtonus *nonnulla quoque amplius explicet; ut originem Theorematis quod initio ponit: Item modum quo quantitates p, q, r, in suis operationibus invenit: Ac denique quomodo in Methodo regressuum se gerat, ut cum ex Logarithmo quærit Numerum. Neque enim explicat quomodo id ex methodo sua derivetur.* Præ se tulit, invenisse se duas series pro Numero cujus Logarithmus sit datus; et tamen in ipsa ea Epist. *Newtonum* rogat, ut Methodum eas ipsas duas series inveniendi sibi explicare velit. N° LII.

Ubi hanc ejus Epistolam accepisset *Newtonus*, rescripsit se omnes illas quattuor series jam ei communicasse; quarum duæ priores una eademque series esset, Literâ *l* pro Logarithmo positâ cum suo signo + vel —; tertia vero Excessus esset Radii supra sinum versum, pro quo jam antea series ad eum missa fuisset. His lectis, destitit *Leibnitius* ab Inventione hac sibi vindi- N° LXI.

licet proportio ad totam Circumferentiam ignoretur. Theorema ergo istud hoc efficiebat; ut inveniretur quivis Sector vel Arcus, cujus Sinus datus sit. Si ignota esset Arcûs proportio ad Circumferentiam totam, Theorema sive Methodus ista tantummodo Arcum exhibuit; sin nota esset, etiam integram Circumferentiam dedit: et proinde erat Theorema prius illud ex duobus supradictis *Newtoni*. Demonstratio vero hujus Theorematis *Leibnitio* tum
Nº XLIV. non innotuit. Quippe in Epistola data 12 Maii 1676, rogavit *Oldenburgum*, ut Demonstrationem ejus a *Collinio* sibi pararet; eam significans Methodum, per quam *Newtonus* id invenerat.

Nº XXXVI. In Epistola à *Collinio* scripta dataque 15 Apr. 1675, *Oldenburgus* ad *Leibnitium* misit octo ex *Newtonianis* et *Gregorianis* seriebus; in quibus erant duæ illæ *Newtoni* supradictæ; pro inveniendo Arcu cujus Sinus datus est, et Sinu cujus datus est Arcus; duæque illæ *Gregorii* jam ante memoratæ, pro inveniendo Arcu, cujus Tangens data est, et Tangente cujus datus est
Nº XXXVII. Arcus. *Leibnitius* vero in Responso dato 20 Maii 1675, se Epistolam illam accepisse his verbis confitebatur: *Literas tuas multa fruge Algebraica refertas accepi, pro quibus tibi et doctissimo* Collinio *gratias ago. Cum nunc præter ordinarias curas Mechanicis imprimis negotiis distrahar, non potui examinare series quas misistis, ac cum meis comparare. Ubi fecero, perscribam tibi sententiam meam: nam aliquot jam anni sunt quod inveni meas via quadam sic satis singulari.*

Nunquam tamen postea, vel (*) agnovit *Leibnitius* se recepisse illas series, vel indicavit qua in re suæ ab illis differrent, vel unquam ullas alias protulit, præter illas ab *Oldenburgo* missas, aut series numerales ex eis deductas in casibus particularibus. Quid autem egerit cum *Gregorii* serie, pro inveniendo Arcu cujus Tangens data est, ipse narrat in *Actis Eruditorum* Mensis April. 1691, p. 178. *Jam*, inquit, *anno 1675 compositum habebam opusculum Quadraturæ Arithmeticæ ab amicis ab illo tempore lectum*, etc. Per Theorema pro transmutandis Figuris, simile illis *Barrovii* et *Gregorii*, jam tandem invenerat seriei hujus demonstrationem; atque id erat *Opusculi* istius argumentum. Nondum tamen acquisiverat cæterarum Demonstrationem, et occasionem nactus hujus quoque expetendæ, sequentem Epistolam *Oldenburgo* scripsit 12 Maii 1676, *Parisiis* datam:

Nº XLIV. *Cum* Georgius Mohr *Danus nobis attulerit communicatam sibi à doctissimo* Collinio *vestro expressionem rationis inter arcum et sinum per infinitas series*

* Cum hæc Recensio scriberetur, non agnoverat, sed anno subsequente in Epistola ad Cometissam de *Kilmansegg*, agnovit se tunc ab *Oldenburgo* accepisse [*Des essais*] serierum specimina.

sequentes; posito sinu x, *arcu* z, *radio* 1,

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \text{etc.}$$

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 - \text{etc.}$$

Hæc, INQUAM, *cum nobis attulerit ille, quæ mihi valde ingeniosa videntur, et posterior inprimis series elegantiam quandam singularem habeat: ideo rem gratam mihi feceris, vir clarissime, si demonstrationem transmiseris. Habebis vicissim mea ab his longe diversa circa hanc rem meditata, de quibus jam aliquot abhinc annis ad te perscripsisse credo, demonstratione tamen non addita quam nunc polio. Oro ut Clarissimo* Collinio *multam a me salutem dicas: is facile tibi materiam suppeditabit satisfaciendi desiderio meo.*

Hic, qui illud INQUAM legerit, facile existimaverit *Leibnitium* duas illas series nunquam antea vidisse; *diversaque ejus circa hanc rem Meditata* prorsus aliud esse quam serierum unam quas anno superiore receperat ab *Oldenburgo*, demonstrationemque istam, quam tunc expoliret, quantivis pretii fore; quippe quam pro *Newtonianæ* methodi munere ἀντίδωρον acceptissimum erat missurus.

Hâc Epistola receptâ, *Oldenburgus*, *Colliniusque* literis ad *Newtonum* scriptis vehementer operam dabant, ut ipse *Newtonus* methodum suam Nº XLVIII describeret, *Leibnitio* communicandam. Quam ob rem *Newtonus* Epistolam scripsit, 13 Junii 1676 datam: in qua eo modo serierum methodum descripsit, quo antea in supradicto *Compendio* fecerat; hac tamen differentia: Hic fuse descripsit Reductionem dignitatis Binomialis in seriem; at Reductionem per Divisionem radicumque affectarum extractionem leviter tantum attigit: Illic Reductionem fractionum et Radicalium in series per Divisionem Radicumque extractionem fuse descripsit; at posuit tantummodo duos primos Terminos seriei in quam dignitas Binomialis reduci possit. Inter Exempla, quæ Epistola illa continebat, erant series pro inveniendo Numero cujus Logarithmus sit datus, et pro inveniendo verso Sinu cujus Arcus Nº XLIX. datus sit. Hæc Ep. *Parisios* missa est 26 Jun. 1676, una cum Manuscripto quodam *Collinii*, extracta quædam continente ex Epistolis *Jacobi Gregorii.*

Gregorius enim prope finem anni 1675, diem suum obierat; *Colliniusque* Nº XLVI. exoratus a *Leibnitio* aliisque ex Academia scientiarum, extracta ex ejus Epistolis confecit; quæ adhuc extant ipsius *Collinii* manu exarata, hoc Titulo: *Extracta ex D.* Gregorii *Literis*, D. Leibnitio *commodanda, qui exorandus est,*

hæsitando ad Radicales; quaque invenirentur series, quæ certis casibus finirentur et Quadraturam Curvarum dărent in Æquationibus Finitis, ubi fieri posset. Fundamentum autem harum Operationum conclusit in hanc Sententiam ænigmatice, ut supra, expressam : *Data æquatione fluentes quotcunque quantitates involvente, fluxiones invenire et vice versa.* Quibus extra omnem dubitationem ponitur se jam antea fluxionum methodum excogitasse. Quod si reliqua in Epistola illa animadvertantur, constabit utique se Methodum illam jam tum ad magnam perfectionem provexisse, et fecisse admodum generalem : cum illæ in Libro suo Quadraturarum Propositiones Methodique Serierum Convergentium Lineamque Curvam ducendi per quemvis datorum Punctorum numerum, jam tum sibi innotuerunt. Quippe, cum Fluxionum methodus haud procedit in Æquationibus finitis, Æquationes in Series Convergentes reducit per Theorema Binomiale, perque Fluentium extractionem ex Æquationibus Fluxiones earum involventibus vel non involventibus. Cumque Æquationes Finitæ defuerint, Series Convergentes ex Problematis Conditionibus deducit, assumendo Terminos Serierum gradatim, et per conditiones illas determinando. Cumque porro Fluentes à fluxionibus sint derivandæ, et Fluxionum lex defuerit, legem eam invenit *quam proxime*, Parabolicam lineam per quemlibet datorum Punctorum numerum ducendo. Atque his progressionibus, vel illo tempore fluxionum suam Methodum multo magis Universalem fecerat *Newtonus*, quam vel hodie est methodus *Leibnitii* Differentialis. N° LVII.

Hæc *Newtoni* Epistola data 24 Octob. 1676, in fine mensis illius vel initio sequentis visa est *Leibnitio* Londini; ejusque Exemplar *Hanoveriæ* ei obtigit initio Veris insequentis : atque ipse paulo post *Leibnitius* Epistola data 21 Jun. 1677 rescripsit : *Clarissimi* Slusii *Methodum Tangentium nondum esse absolutam; Celeberrimo* Newtono *assentior. Et jam a multo tempore rem Tangentium generalius tractavi, scilicet per differentias Ordinatarum.* —— *Hinc nominando in posterum*, d y *differentiam duarum proximarum* y, etc. Hic demum primo cœpit *Leibnitius* Differentialem suam Methodum proferre : neque vel minimum argumentum est, prius eam se scivisse, quam postremas *Newtoni* Literas accepisset. Dicit quidem, *jam a multo tempore rem Tangentium generalius se tractavisse, scilicet per differentias Ordinatarum.* Atqui in aliis literis eodem modo jam affirmaverat, se plures Convergentes series tam directas quam inversas invenisse; priusquam ullam inveniendi eas methodum haberet; oblitumque jam fuisse inversæ methodi serierum, priusquam utilitatem ejus perciperet. Nemo in causa propria sibi testis est. Iniquus admodum fuerit Judex, omniumque gentium jura conculcaverit, qui quemquam in sua N° LXVI.

causa pro legitimo teste admiserit. Illud ergo est probandum ac ostendendum, jam antea methodum hanc *Leibnitium* invenisse quam Literas illas *Newtoni* accepisset. Quod si hoc nullo argumento confirmatum fuerit; de primo Methodi Inventore nulla superest controversia.

Marchio *Hospitalius*, vir candidissimus, in Præfatione Libri sui *De Analysi quantitatum infinite parvarum*, A. D. 1696 edita, narrat; ut, paulo post Tangentium Methodum a *Cartesio* publicatam, *Fermatius* quoque methodum invenerit, quam ipse tandem *Cartesius* suâ in plerisque simpliciorem esse confessus est. « Nondum tamen, inquit *Hospitalius*, tam simplex erat, quam « postea a *Barrovio* reddita est, naturam Polygonorum propius conside- « rando, quæ sponte sua menti objicit parvulum Triangulum, compositum « ex particula Curvæ inter duas ordinatas sibi infinite propinquas jacentis, « et ex differentia duarum istarum Ordinatarum, duarumque itidem corres- « pondentium Abscissarum. Atque hoc Triangulum illi simile est, quod ex « Tangente et Ordinata et Subtangente fieri debet: adeo ut per unam sim- « plicem Analogiam omnis jam Calculatio evitetur, quæ et in *Cartesiana* et « in hac ipsa prius Methodo necessaria erat. Quo tamen vel hæc vel *Car-* « *tesiana* revocari ad usus posset, necessario tollendæ erant Fractiones et « Radicales. Ob hujus itaque Calculi imperfectionem, introductus est ille « alter Celeberrimi *Leibnitii*, qui insignis Geometra inde est exorsus, ubi « *Barrovius* aliique desierant. Porro hic ejus Calculus in Regiones hactenus « ignotas aditum fecit; atque ibi tot et tanta patefecit, quæ vel doctissimos « totius Europæ Mathematicos in admirationem conjecerunt, etc. »

Hactenus *Hospitalius*. Non viderat nimirum *Newtoni Analysin*, neque Epistolas ejus 10 Dec. 1672, 13 Jun. 1676, et 24 Octob. 1676 datas: quarum nulla ante annum 1699 typis publicata est: nescius itaque *Newtonum* hæc omnia effecisse atque indicasse *Leibnitio*, *Leibnitium* ipsum arbitratus est inde incepisse ubi desierat *Barrovius*; *Leibnitium* docuisse, quo pacto *Barrovii* methodus adhiberetur non hærendo ad fractiones et surdas, eaque re mirifice eam ampliasse et promovisse. Similiterque *Jacobus Bernoullius* in Actis Eruditorum *Jan.* 1691, p. 14, sic memorat: *Qui calculum* Barrovianum (*quem in Lectionibus suis Geometricis adumbravit author, cujusque specimina sunt tota illa Propositionum inibi contentarum farrago*) *intellexerit*, [calculum] *alterum a Domino* Leibnitio *inventum, ignorare vix poterit; utpote qui in priori illo fundatus est, et nisi forte in Differentialium notatione et operationis aliquo compendio, ab eo non differt.*

Jam vero, in Methodo sua Tangentium, *Barrovius* ducit duas Ordinatas indefinite sibi invicem propinquas, literamque *a* ponit pro Ordinatarum

differentia, proque Abscissarum differentia literam *e*; et in ducendis Tangentibus has tres Regulas statuit : 1. *Inter computandum*, inquit, *omnes abjicio terminos in quibus ipsarum* a *vel* e *potestas habeatur, vel in quibus ipsæ ducuntur in se. Etenim ipsi termini nihil valebunt.* 2. *Post æquationem constitutam omnes abjicio terminos literis constantes quantitates notas seu determinatas significantibus, aut in quibus non habentur* a *vel* e. *Etenim illi termini semper ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt.* 3. *Pro* a *Ordinatam, et pro* e *Subtangentem substituo. Hinc demum Subtangentis quantitas dignoscitur.*

Hactenus *Barrovius: Leibnitius* autem in Epistola 21 Jun. 1677, supra citata, Nº LXVI.
in qua primo differentialem suam Methodum cœpit proponere, *Barrovianam* hanc Tangentium Methodum exacte secutus est; præterquam quod literas *a* et *e Barrovianas* mutaverit in *dx* et *dy*. Quippe in Exemplo, quod ibi exhibet, duas ducit Parallelas Lineas, atque omnes Terminos sub inferiore linea ponit, in quibus *dx* et *dy* (divisim vel junctim) sunt plus unius dimensionis; omnes vero Terminos, in quibus *dx* et *dy* absunt, super lineam superiorem statuit; et ob rationes a *Barrovio* datas, omnes hos Terminos facit evanescere. Jam autem per Terminos in quibus *dx* et *dy* unius tantum dimensionis sunt, quosque inter binas illas lineas ponit, proportionem Subtangentis ad ordinatam determinat. Recte itaque animadvertit Marchio *Hospitalius*, *Leibnitium* inde incipere ubi *Barrovius* desierat; quippe utriusque methodus Tangentium prorsus est eadem.

Illud tamen *Leibnitius* de hac methodo superannotat; Conclusionem nempe hujus Calculi cum *Slusii* regula coincidere; illamque regulam cuivis, qui hanc methodum intelligat, in promptu occurrere. Acute sane : quippe in Epistolis suis *Newtonus* indicaverat, *Slusianam* regulam generalis suæ methodi Corollarium tantum esse.

Cumque in Epistolis *Newtonus* dixisset, in ducendis Tangentibus, Maximisque et Minimis determinandis, Methodum suam procedere, non hæsitando ad surdas; *Leibnitius* itidem annotat, sic promoveri posse Tangentium suam methodum, ut ad surdas et Fractiones non hæreamus; et deinde addit: *Arbitror quæ celare voluit* Newtonus *de Tangentibus ducendis, ab his non abludere.* Nº LXVII.
Quod addit, ex hoc eodem fundamento Quadraturas quoque reddi faciliores, me in hac sententia confirmat, nimirum semper figuræ illæ sunt Quadrabiles quæ sunt ad æquationem differentialem. Ex quibus ejus verbis, cum præcedente Calculatione comparatis, non dubium est, quin tum satis sciverit *Leibnitius*, *Newtono* ad manum fuisse methodum hæc omnia efficientem; apparetque eum tentavisse, si forte Differentialis Tangentium methodus *Barroviana* ad eadem efficienda promoveri posset.

Differentialis hujus methodi Elementa publicavit *Leibnitius* in *Actis Eruditorum* Nov. [1] 1684, exemplisque ducendi Tangentes maximasque et minimas determinandi eam illustravit; quibus addit: *Et hæc quidem initia sunt* [2] *Geometriæ cujusdam multo sublimioris, ad difficillima ac pulcherrima quæque etiam mixtæ Matheseos problemata pertingentis, quæ sine Calculo* [3] *Differentiali* AUT SIMILI *non temere quisquam pari facilitate tractabit.* Ubi, cum dicit AUT SIMILI, sine dubio ad *Newtoni* Methodum respexit: totaque ista periodus nihil amplius in se habet, quam quod *Newtonus* in literis 1672 et 1676 de sua generali methodo affirmaverat.

Et in Actis Eruditorum 1686, p. 279, *Malo autem,* inquit *Leibnitius,* dx *et similia adhibere quam literas pro illis, quia istud* dx *est modificatio quædam ipsius* x; *etc.* Sciebat scilicet in hac methodo *Literas* more *Barrovii* satis commode posse adhiberi; malebat tamen novis Symbolis uti *dx* et *dy*; etsi nihil per hæc Symbola fieri possit, quod non brevius commodiusque per singulas Literas fiat.

Anno sequente in lucem edita sunt *Newtoni Principia Philosophiæ*, refertus liber ejusmodi Problematibus, qualia *Leibnitius Difficillima* appellaverat *et pulcherrima etiam mixtæ matheseos Problemata, quæ sine calculo differentiali aut SIMILI non temere quiquam pari facilitate tractabit.* De hoc libro sic locutus est Marchio *Hospitalius, quasi totus fere per hunc Calculum compositus esset.* Et ipse adeo *Leibnitius,* Epistola ad *Newtonum,* data Hanoveriæ $\frac{7}{17}$ *Martii* 1693, ipsiusque manu scripta, quæ adhuc superest, et Regiæ Societati nuper est exhibita, eandem rem agnoscebat his verbis: *Mirifice ampliaveras Geometriam tuis seriebus, sed edito Principiorum opere ostendisti patere tibi quæ Analysi receptæ non subsunt. Conatus sum ego quoque, notis commodis adhibitis quæ differentias et summas exhibeant, Geometriam illam quam Transcendentem appello, Analysi quodammodo subjicere; nec res male processit.* Atque iterum in Responso ad D. *Fatium,* quod habetur in Actis Eruditorum Maii 1700, p. 203, versu 21, id fassus est *Leibnitius.*

In secundi Libri *Principiorum* Lemmate secundo, Elementa hujus calculi synthetice demonstrata sunt; et in fine Lemmatis est Scholium, his verbis: *In Literis quæ mihi cum Geometra peritissimo* G. G. Leibnitio *annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas et Minimas, ducendi Tangentis et similia peragendi, quæ in terminis*

---

[1] *Octob.* F. L.

[2] *Tantum,* desideratur. F. L.

[3] *Nostro,* desideratur. F. L.

surdis æque ac in rationalibus procederet ; et literis transpositis hanc sententiam involventibus [Data æquatione quotcunque quantitates fluentes involvente, fluxiones invenire, et vice versa] *eandem celarem : rescripsit Vir Clarissimus* [anno proximo] *se quoque in ejusmodi methodum incidisse, et methodum suam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum et notarum formulis. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate.* In illis Epistolis, N° XXVI
et in alia 10 Decemb. 1672 data (cujus exemplar post annos quattuor ab *Oldenburgo* ad *Leibnitium* mittebatur, ut supra diximus) adeo aperte explicaverat suam methodum *Newtonus*, ut non difficile fuerit *Leibnitio*, subsidio methodi Tangentium *Barrovianæ*, ex illis Epistolis eam exsculpere. Certum tamen est, ex argumentis supra allatis, non prius eum scivisse eam, quam Epistolas illas legisset.

Duarum *Newtoni* Epistolarum 13 Jun. et 24 Octob. 1676 exemplar ab *Oldenburgo* acceperat *Wallisius*, et ex eis plura publicaverat in *Algebra* sua Anglice edita 1683, Latine autem 1693; pauloque post ex Hollandia admonitus est, ut Epistolas illas integras publicaret; quia notiones de fluxionibus *Newtonianæ* cum plausu ibi per hominum ora ferrentur, sub nomine Methodi Differentialis *Leibnitii*. Quamobrem in præfatione primi suorum Operum Tomi, A. D. 1695 editorum, ejus rei mentionem injecit. Et in Epistola ad *Leibnitium* data 1 Dec. 1696, quæ in Tertio Tomo extat, hæc de ea re habet : *Cum Præfationis (præfigendæ) postremum folium erat sub prælo, ejusque typos jam posuerant typothetæ, me monuit amicus quidam (harum rerum gnarus) qui peregre fuerat, tum talem methodum in Belgia prædicari, tum illam cum* Newtoni *methodo fluxionum quasi coincidere. Quod fecit ut (translatis typis jam positis) monitum interseruerim.* Quin et in Epistola ad *Newtonum* data 10 April. 1695, et Regiæ Societati nuper exhibita, sic de ea re verba facit : « *Utinam typis ederes prolixas illas duas Epistolas Junii et* « *Augusti* (*Octobrem* dicere debuit) 1676. *Ex Hollandia certior factus sum,* « *amicos ibi tuos hoc postulare ; quia notiones tuæ* (*de fluxionibus*) Leibnitio *ibi* « *ascribuntur, sub nomine* Calculi differentialis. *Hoc ex* Hollandia *accepi* « *cum totus hic Tomus præter partem Præfationis jam prælo subjectus esset; ita* « *ut nihil aliud inserere hic potuerim, dum cessarent operæ, præter brevem illam* « *quam ibi reperies narrationem. Non tam æquus es vel tuo vel Gentis tuæ* « *honori, quam oportebat : cum res quantivis pretii tam diu in scriniis celas,* « *donec alii honorem tibi debitum præripiant. Conatus sum in eo negotio debitum tibi reddere; doleoque me non binas istas Epistolas integras atque* « *αὐτολεξεὶ edidisse.* »

Operum Vol. 2. p. 368.

Porro illa brevis mentio, quam *Wallisius* præfationi illi inseruit, his verbis

habetur: *In secundo Volumine (inter alia) habetur* Newtoni *Methodus de Fluxionibus (ut ille loquitur) consimilis naturæ cum* Leibnitii *(ut hic loquitur) calculo Differentiali (quod qui utramque methodum contulerit satis advertat, utut sub loquendi formulis diversis) quam ego descripsi (Algebræ cap. 91 etc. præsertim cap. 95) ex binis* Newtoni *Literis (aut earum alteris) Junii 13 et Octob.* 24, 1676, *ad* Oldenburgum *datis, cum* Leibnitio *communicandis (iisdem fere verbis, saltem leviter mutatis, quæ in illis literis habentur), ubi* METHODUM HANC LEIBNITIO EXPONIT, *tum ante* DECEM ANNOS; *nedum plures,* [id est anno 1666 vel 1665] *ab ipso excogitatam. Quod moneo, ne quis causetur de hoc Calculo differentiali nihil a nobis dictum esse.*

His ad hunc modum actis, anni sequentis mense Junio, editores *Actorum Lipsiensium* (vel potius ut ex stylo colligitur, ipse *Leibnitius*) cum de duobus prioribus *Wallisii* Tomis narrationem contexunt, hujus in Præfatione clausulæ mentionem fecerunt, questique sunt, non quod dixerit *Newtonum* in duabus illis Epistolis explicuisse *Leibnitio* fluxionum Methodum decennio ante vel amplius a se inventam; sed quod, de calculo differentiali verba faciens, eamque, ut ait, ob rationem *Ne quis causetur de Calculo Differentiali nihil ab ipso dictum fuisse*, non monuerit Lectorem, jam tum *Leibnitium* Calculum illum penes se habuisse, cum mutuæ illæ inter ipsum et *Newtonum* literæ, *Oldenburgii* operâ, hinc inde scriberentur. Et in pluribus post illa Epistolis inter *Leibnitium* et *Wallisium* de ea re conscriptis, non negabat *Leibnitius*, *Newtonum* toto ante eas literas datas decennio dictam Methodum invenisse, id quod affirmaverat ibi *Wallisius*; non præ se ferebat, tam mature se suam Methodum excogitasse; nullo argumento probabat, se ante annum 1677 in eam incidisse; neque id ipsum probabat, nisi ex *Newtoni* concesso; non affirmabat, ipse se maturius habuisse; laudabat *Newtonum*, quod in hac re tam candide egerit; concedebat, utramque Methodum eodem in summâ recidere; seque idcirco solitum communi *Analyseos Infinitesimæ* nomine utramque indigitare; adjiciebat, sicuti *Vietæ Cartesiique* methodi, communi *Analyseos Speciosæ* nomine ferebantur, licet in aliquibus differrent; ita forte suam *Newtonique* Methodos in aliquibus differre posse: nihilque sibi vindicabat, præterquam illa in quibus, ut ipsi videbatur, inter se differebant; Notatione scilicet, Æquationibus Differentialibus et Æquationibus Exponentialibus. In Epistola tamen 21 Jun. 1677, Æquationes
N° LXVI. Differentiales sibi ac *Newtono* communes esse existimabat.

Hic erat eo tempore inter *Wallisium* et *Leibnitium* controversiæ status. Quadriennio vero post, cum D. *Fattus* suspicionem injecerat, posse fieri ut *Leibnitius*, secundus Calculi inventor, a *Newtono* primo ejus ante multos

annos inventore nonnihil surripuerit; *Leibnitius* in Responso suo in Actis Eruditorum Maii 1700 edito, concedebat *Newtonum* sua sola Minerva methodum excogitasse, neque negabat *Newtonum* multis annis se priorem in eam incidisse: neque plus sibi arrogabat, quam se quoque propria Minerva ac sine ope *Newtoni* eandem repperisse; præque se ferebat, tum cum primum eam typis ederet, nescisse se quicquam præter Methodum Tangentium a *Newtono* inventum esse. Cumque de sublimi quadam parte Methodi loqueretur, qua *Newtonus* A. C. 1686 solidum minimæ Resistentiæ invenerat, hæc addidit: *Quam*, inquit, *methodum ante D.* Newtonum *et me nullus quod sciam Geometra habuit; uti ante hunc maximi nominis Geometram* NEMO *specimine publice dato se habere probavit; ante Dominos* Bernoullios *et* me *nullus communicavit*. Hunc usque igitur inventoris primi nomen minime sibi vindicavit *Leibnitius*; non ausus id facere ante obitum *Wallisii*, postremi illorum Senum, qui quæ inter *Anglos* et *Leibnitium* per annos quadraginta acta erant optime noverant. Decessit autem *Wallisius* mense Octobri 1703; *Leibnitius* vero sibi demum arrogare hoc cœpit Januario 1705.

Newtonus Tractatum suum de Quadraturis edidit, 1704; is vero * diu ante editionem scriptus erat, quippe plurima ex eo citata sunt in Epistolis 24 Octob. et 8 Novemb. 1676. Spectat autem ad methodum fluxionum; et ne pro novo opere haberetur, iterabat id *Newtonus* quod ante annos novem a *Wallisio* publicatum erat, nullo tum contradicente, hanc nempe Methodum gradatim fuisse repertam annis 1665 et 1666. Jam autem Actorum *Lipsiensium* editores (hoc est, ipse *Leibnitius*) cum de Tractatu hoc agerent, affirmabant *Leibnitium* fuisse primum ejus Methodi inventorem, N° LXXIX. et *Newtonum* pro Differentiis fluxiones substituisse. Atque hæc affirmatio ortum dedit præsenti controversiæ.

Quippe D. *Keillius* in Epistola in *Transactionibus Philosophicis* edita, retorsit N° LXXIX in eos hoc telum: *Fluxionum*, inquiens, *Arithmeticam sine omni dubio primus invenit D.* Newtonus, *ut cuilibet ejus Epistolas a* Wallisio *editas legenti facile constabit. Eadem tamen Arithmetica postea, mutatis nomine et notationis modo, a D.* Leibnitio *in* Actis Eruditorum *edita est.*

Newtonus, priusquam vidisset id, quod in Actis Lipsiensibus publicatum fuerat, ægre tulit a D. *Keillio* hoc dictum esse; ne forte inde lis aliqua nas-

---

* De hoc Tractatu *Ralphsonus* in Historia sua fluxionum Cap. I, sic scripsit: *Newtonus* Anno 1704 parvum edidit Tractatum quem circa Annum 1676 ex Tractatu antiquiore extraxit, quemque doctus *Halleius* et ego circa Annum 1691 *Cantabrigiæ* in manibus nostris habuimus,

ceretur. *Leibnitius* quoque, hoc acerbius interpretans quam vel a *Keillio*
N° LXXX. cogitatum fuerat, in literis ad D. *Sloane* datis 4 Martii 1711, de hoc ut calumnia questus est; petiitque ut Regia Societas injungeret *Keillio*, Palinodiam ut publice caneret. *Keillius* vero id quod scriptum erat probaturum se ac defensurum profitetur, licentiâ a *Newtono*, cui quod in Actis Lipsiensibus dictum est ostendebatur, impetrata. *Leibnitius* autem in altera ad
N° LXXXV. D. *Sloane* Epistola 29 Decem. 1711 data, neglecta accusationis suæ probatione, candorem modo suum prædicare, de quo vel dubitare incivile foret; non modum ostendere quo methodum invenisset; in Actis Lipsiensibus suum cuique datum esse; se inventionem novem annis (septem credo dicere debuit) penes se celavisse; ne quisquam (*Newtonum* intelligit) eam sibi præripuisse glorietur; *Keillium* esse hominem juvenem, rerum anteactarum ignarum; dixisse illud, *Newtono* nolente; rixosum porro hominem esse, cui silentium imponi debeat; se cupere ut *Newtonus* ipse sententiam de hac re suam pronuntiaret. Atqui satis noverat, nihil amplius *Keillium* dixisse, quam quod tredecim ante annis, nullo tum contra eunte, dixerat *Wallisius*: noverat *Newtonum* sententiam de hac re tulisse, in Introductione ad librum *Quadraturarum*, prius in lucem editum, quam hæc lis moveretur. *Wallisius* vero jam ad plures abierat: Qui restabant in Anglia Mathematici, pro noviciis habentur: de cujusvis candore *Leibnitius* jure suo dubitare volet; *Newtonus* denique, nisi vel dissimulaverit rem vel abnegaverit, in rixas et molestias trahendus est.

Regia itaque Societas, cujus Auctoritati non minus *Leibnitius*, quam *Keillius* (uterque scilicet in ea Socii) parere debebant, bis a *Leibnitio* huc provocata, nefasque esse existimans vel damnare vel notare *Keillium*, re nondum examinata; sciensque nec *Newtonum* neque *Leibnitium* (qui in vivis soli vel scirent quid vel meminissent quod in his rebus ante annos quadraginta actum sit) in hac *Keillii* causa testes esse posse; negotium id dederunt numeroso ex Societate consessui, ut excuterent veteres in Archivis suis Epistolas et Chartas, et quid in eis de hoc negotio reperissent, So-
N° LXXXVI. cietati exponerent: quam expositionem ut primum Societas acceperat, et ipsam et Epistolas Chartasque ipsas in publicum edi jussit. Ceterum ex illis id Consessui compertum visum est, *Newtonum* anno 1669 vel antea Methodum illam penes se habuisse, *Leibnitium* vero non ante annum 1677.

Ut Methodi Differentialis primum se auctorem venditaret *Leibnitius*, insimulavit *Newtonum* litera *o* more vulgari pro dato Incremento τȣ *x* primo fuisse usum, qui mos Differentialis Methodi utilitates tollit: post edita vero *Principia* mutavisse *o* in $\dot{x}$, substituendo $\dot{x}$ pro dx. Hoc vero nunquam quis

probaverit; *Newtonum* unquam o in $\dot{x}$ mutavisse, vel usurpasse $\dot{x}$ pro dx, vel omisisse uti litera o. *Newtonus* in *Analysi* anno 1669, vel antea scripta, et in Libro de *Quadraturis*, et in *Principiis Philosophiæ* usus est litera o; atque adhuc utitur, eodem plane quo prius sensu. In libro de *Quadraturis* usus est litera o una cum symbolo $\dot{x}$; ideoque non posuit unum loco alterius. Symbola ista o et $\dot{x}$ pro rebus diversi generis posita sunt. Prius est momentum, alterum Fluxio est sive velocitas, ut supra est explicatum. Cum litera x pro quantitate uniformiter fluente ponitur, symbolum $\dot{x}$ est unitas, et litera o (seu $1\dot{x}o$) momentum, atque $\dot{x}o$ et dx idem ambo Momentum significant. Literæ punctatæ numquam indicant Momenta; nisi cum multiplicantur per momentum o vel expressum vel subintellectum quo infinite parvæ evadant; et tum Rectangula pro momentis ponuntur.

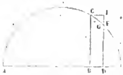
Newtonus non in formis Symbolorum suam Methodum constituit, neque se alligat ad ullam unam speciem Symbolorum pro fluentibus et fluxionibus. Ubi areas Curvarum pro fluentibus ponit, sæpe ponit ordinatas pro fluxionibus, et fluxiones denotat per Symbola ordinatarum, ut in *Analysi* sua fecit. Ubi Lineas pro fluentibus ponit, quævis symbola ponit pro velocitatibus Punctorum Lineas describentium, hoc est, pro fluxionibus primis; et quævis alia symbola pro incremento earum velocitatum, hoc est, pro fluxionibus secundis; ut sæpe fit in *Principiis Philosophiæ*. Ubi autem literas x, y, z, pro fluentibus ponit, earum fluxiones denotat vel per alias literas ut p, q, r, vel per easdem literas alia forma positas ut X, Y, Z, vel $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, punctatas, vel per quasvis Lineas ut *DE*, *FG*, *HI*, consideratas tamquam earum exponentes. Atque hoc quidem manifestum est ex Libro ejus de *Quadraturis*, ubi in prima Propositione fluxiones indicat per literas punctatas, in ultima propositione per ordinatas Curvarum; et in Introductione per alia Symbola, dum Methodum explicat illustratque per Exempla. *Leibnitius* in sua Methodo nulla Fluxionum Symbola habet; et idcirco *Newtoniana* Fluxionum symbola sunt in eo genere prima. *Leibnitius* Symbolis illis Momentorum sive differentiarum dx, dy, dz, primo uti cœpit anno 1677: *Newtonus* Momenta denotabat per Rectangula sub Fluxionibus et Momento o, cum *Analysin* suam scriberet, anno 1669 vel antea. *Leibnitius* Symbolis $\int x$, $\int y$, $\int z$ pro summis Ordinatarum usus est, jam inde ab anno 1686: *Newtonus* in *Analysi* sua eandem rem denotavit, inscribendo Ordinatam in Quadrato vel Rectangulo, ad hunc modum $\boxed{\frac{aa}{64x}}$. Omnia *Newtoni* Symbola sunt in suo quæque genere prima. Nº XII. Nº VIII.

Quandoquidem autem insimulatum est, usum literæ o vulgarem esse, ac

Methodi differentialis utilitates tollere; e contrario, Fluxionum Methodus, prout a *Newtono* usurpata est, omnes Differentialis Methodi utilitates habet, et præterea alias. Elegantior est; quippe in ejus Calculo una tantum infinite parva Quantitas est per Symbolum denotata, idque Symbolum est *o*. Nullas quantitatum infinite parvarum Ideas habemus: et idcirco in suam Methodum Fluxiones introduxit *Newtonus*, ut quantum fieri possit per finitas quantitates procederet. Naturalis magis est magisque Geometrica; fundata scilicet super primis quantitatum nascentium rationibus, quæ existentiam in Geometria habent: cum Indivisibilia contra, super quibus fundata est Differentialis Methodus, nullam existentiam habeant nec in Geometria neque in natura. Sunt quidem rationes primæ quantitatum nascentium; at non sunt quantitates primæ nascentes. Natura quantitates generat per continuum fluxum sive Increscentiam: talemque Arearum et solidorum Generationem admiserunt veteres Geometræ, cum lineam unam in aliam ducerent per motum localem ad generandam Aream, atque Aream in Lineam per motum localem ducerent ad generandum solidum: at computatio Indivisibilium, ut inde componatur Area vel Solidum, numquam in hunc usque diem in Geometria locum habuit. Porro *Newtoniana* Methodus utilior quoque est illâ alterâ, atque certior; quippe adaptata et ad prompte inveniendam Propositionem per tales Approximationes, quales in Conclusione nullum errorem creent, et ad eam exacte demonstrandam: *Leibnitiana* vero methodus ad inveniendam tantum Propositionem, non ad demonstrandam accommodata est. Cum operatio non succedat in Æquationibus finitis, confugere solet *Newtonus* ad Series Convergentes; unde Methodus ejus sit incomparabiliter magis universalis, quam illa *Leibnitii* quæ intra Finitas Æquationes terminatur: siquidem ille nullam partem habet in Infinitarum Serierum methodo. Annos post aliquot quam Serierum Methodus inventa est, *Leibnitius* propositionem invenit pro transmutandis Curvilinearibus Figuris, in alias æqualium Arearum Curvilineares, ut inde per Series Convergentes quadrentur; at Methodi figuras illas alias per tales Series quadrandi non erant *Leibnitii*. Ope novæ illius *Analyseos*, majorem illarum propositionum partem, quæ in *Principiis Philosophiæ* habentur, invenit *Newtonus*. At cum antiqui Geometræ, quo certiora omnia fierent, nihil in Geometriam admiserint priusquam Synthetice demonstratum esset; idcirco Propositiones suas Synthetice demonstravit *Newtonus*, ut Cœlorum Systema super certa Geometria constitueretur. Atque ea causa est, cur homines harum rerum imperiti, Analysin latentem, cujus ope Propositiones illæ inventæ sunt, difficulter admodum perspiciant.

Insimulatum est, *Newtonum* in Scholio sub finem libri de *Quadraturis* posuisse tertium quartum quintumque terminos Seriei convergentis respective æquales secundæ tertiæ quartæque Differentiis primi termini; et proinde Methodum secundæ tertiæ quartæque Differentiarum tum non intellexisse. Atqui in prima Libri ejus Propositione (anno 1693 a *Wallisio* edita) modum ostendit inveniendi primam secundam tertiam sequentesque Fluxiones in infinitum : ac proinde cum Librum eum scriberet, ante annum nempe 1676, omnium omnino fluxionum inveniendarum methodum intellexit; et consequenter, omnium Differentiarum. Quod si eam non intellexit, cum anno 1704 Scholium illud in fine Libri subjunxerit : necesse est hoc eo contigisse, quod per istorum annorum intervallum de memoria forte ei exciderat. Hoc solum igitur disquirendum est, oblitus ne fuerit Methodi secundarum tertiarumque Differentiarum ante annum 1704.

Principiorum Philosophiæ libri secundi Propositione decima, cum exponeret utilitates aliquot Terminorum Convergentis seriei ad solvenda Problemata, hoc docet *Newtonus;* si primus nempe seriei Terminus repræsentet Ordinatam BC cujuscumque curvæ Lineæ ACG; et CBDI sit Parallelogrammum infinite exile, cujus latus DI secet curvam in G, et Tangentem ejus CF in F; tum secundus Seriei Terminus repræsentabit lineam IF, et tertius Terminus Lineam FG. Atqui Linea FG dimidium tantum est secundæ differentiæ Ordinatæ : et proinde, cum Principia sua *Newtonus* scriberet, Tertium Terminum Seriei æqualem posuit dimidio secundæ Differentiæ Termini primi : et consequenter, non oblitus tum erat Methodi *Differentiarum* secundarum.



Dum in eo opere versaretur, sæpissime ei considerandum erat Incrementum vel Decrementum velocitatum quibuscum quantitates generantur: inque ea re recte argumentatur. Atqui incrementum illud vel Decrementum est ipsa secunda fluxio Quantitatis : non ergo oblitus tum erat Methodi *Fluxionum* secundarum.

Anno 1692 *Newtonus*, a *Wallisio* rogatus, misit ei Propositionem primam libri de *Quadraturis*, cum exemplis ejus in primis secundis tertiisque Fluxionibus; id quod cuivis videre est in *Wallisii* Operum Tomo Secundo (anno 1693 edito) pag. 391, 392, 393 et 396. Ideoque ne tum quidem oblitus erat Methodi secundarum *Fluxionum*.

Nec sane verisimile est, se anno 1704, cum dictum Scholium adderet fine libri de *Quadraturis*, oblitum esse non solum primæ ipsius illius Libri

Propositionis, sed et ultimæ quoque ad quam Scholium istud subtextum erat. Si vocula *ut*, quæ in Scholio illo inter verba *erit* et *ejus* casu aliquo excidisse potuit, ibi reponatur; tum Scholium istud et duabus illis Propositionibus et ceteris *Newtoni* scriptis congruet; et frustra omnino erunt, qui oblivionem hic cavillantur.

Atque hactenus de Natura atque Historia harum Methodorum egimus: porro haud abs re fuerit de toto hoc negotio observationes paucculas subjungere.

N° LXXII. In *Commercio* hoc *Epistolico*, tres memorantur *Leibnitii* Tractatus, scripti nempe omnes postquam exemplar *Principiorum Newtoni* Hanoveriam ei missum fuerat; postquam viderat quoque ejusdem libri recensionem in *Actis Eruditorum* Jan. et Feb. 1689[1]. In his vero *Leibnitii* Tractatibus primariæ *Newtoniani* libri Propositiones novo modo recomponuntur, *Leibnitioque* arrogantur; quasi prius eas ipse invenerat, quam *Newtoni* liber ederetur. Quis testem in sua ipsius causa patienter ferat? Vel fidem faciat *Leibnitius* se ante *Newtoni* librum editum eas excogitasse, vel de eis sibi vindicandis pudorem habeat.

In Tractatuum illorum postremo, vicesima propositio (quæ omnium *Newtonianarum* primaria est) Corollarium fit propositionis decimæ nonæ. Atqui decima illa nona Demonstrationem sibi annexam habet παράλογον et falsam. Aut evincat itaque *Leibnitius* demonstrationem illam non falsam esse; aut fateatur se 19 et 20 Propositiones non ejus Demonstrationis ope repperisse, sed quo *Newtoni* eximiam illam Propositionem pro sua venditaret, Demonstrationem ejus extundere frustra tentavisse. Quippe in XX^a^ Propositione præ se fert, nescisse se qua eam via *Newtonus* invenerat; ut fidem scilicet Lectori faceret, se sine illius ope eamdem repperisse.

Ex erroribus in XV^a^ et XIX^a^ *Leibnitii* propositione commissis, ostenderat *Keilius*, *Leibnitium*, cum tres illos Tractatus scriberet, operandi vias in secundis Differentiis non optime calluisse. Id quod amplius adhuc constat, ex illius Tractatus tertii Propositionibus X^a^, XI^a^, et XII^a^. Has enim constituit ceu fundamentum Infinitesimalis suæ Analyseos in considerandis Viribus centrifugis; et decimam quidem proponit in relatione ad centrum Curvitatis orbitæ; in undecima tamen et duodecima eam adhibet in relatione ad cen-

[1] Haud accurate refertur. Vide *Act. Erud.*: Isaaci Newton... *Philosophiæ naturalis principia Mathematica*; An. 1688, men. Jun. Pag. 303 et seq. — G. G. L. *De lineis opticis et...* An. 1689, men. Jan. Pag. 36 et seq. — G. G. L. *Schediasma de resistentia Medii et...* Ibid. Pag. 39 et seq. — *Tentamen de motuum cœlestium causis...* An. 1689, men. Feb. Pag. 82 et seq. (F. L.)

trum circulationis. Cum hæc duo diversa centra confuderit in fundamentalibus his Propositionibus super quibus Calculum suum struebat, non potuit fieri quin in superædificando peccaret; neque ex erroribus illis extricare se valuit, per ignorantiam suam in secundis tertiisque Differentiis. Atque hoc ulterius constat ex sexto secundi Tractatus Articulo. Quippe in isto Articulo lapsus est *Leibnitius*, peccatumque eo admisit, quod nesciret secundas tertiasque Differentias recte tractare. Cum hos itaque Tractatus componeret, in Discipulorum adhuc classe versabatur; idque eum decet, si pudor est, candide fateri.

Omnino ergo verisimile est, quemadmodum ex dictis tribus *Newtoni* Epistolis cum *Barroviana* Tangentium Methodo comparatis differentialem illam methodum extuderat *Leibnitius;* ita decennio post, cum *Newtoni Principia Philosophiæ* in publicum prodirent, aliquatenus eum in illa progressum esse, dum tentaret dictam Methodum ad primarias *Newtoni* propositiones extendere; et ea occasione tres illos Tractatus conficeret. Quippe Propositiones quæ in illis habentur, si Errores et Quisquilias dempseris, omnino vel *Newtonianæ* sunt, vel ut Corollaria ex eis facile deducendæ; in alia scilicet verborum forma, re tamen non diversa, jam ante a *Newtono* publicatæ. Has tamen *Leibnitius* venditavit, tamquam a se solo diu ante inventas, quam a *Newtono* sint editæ. Nempe in extremo primi Tractatus, se invenisse eas fingit, antequam *Newtoniana Principia* prodiissent; immo nonnullas ex eis, antequam ipse *Parisiis* discessisset, hoc est, ante Octobrem anni 1676. Tractatum autem secundum claudit his verbis: *Multa ex his deduci possunt praxi accommodata, sed nobis nunc fundamenta Geometrica jecisse suffecerit, in quibus maxima consistebat difficultas: et fortassis attente consideranti vias quasdam novas* (1) *satis antea impeditas aperuisse videbimur. Omnia autem respondent nostræ Analysi Infinitorum, hoc est calculo summarum et differentiarum (cujus elementa quædam in his Actis dedimus) communibus quoad licuit verbis hic expressa.* In his, ut vides, jactat *Leibnitius*, se primum *fundamenta Geometrica in quibus maxima consistebat difficultas* in hoc ipso Tractatu secundo posuisse; seque solum *vias quasdam novas satis antea impeditas* in Tractatu eodem aperuisse: cum tamen prius ferme biennio prodiissent *Newtoni Principia*, atque in hoc ipso Tractatu edolando subsidio fuissent *Leibnitio;* quin et *communibus quoad licuit verbis* composita essent; atque omnia ista *Fundamenta* omnesque istas *vias novas* in se continerent. Atque horum omnium conscius erat *Leibnitius*, tum cum Tractatum illum ederet; ultroque tum

(1) *Vel certe...* Desideratur. (F. L.)

agnoscere et prædicare debebat, *Newtonum* fuisse, qui *Fundamenta Geometrica in quibus maxima consistebat difficultas* primus posuerit, qui *vias novas satis antea impeditas* primus expediverit. Atque hæc quidem omnia quodammodo agnoscebat in Responso ad D. *Fatium*, *Quam Methodum*, inquiens, *ante dominum* Newtonum *et me nullus quod sciam Geometra habuit; uti ante hunc maxim nominis Geometram* NEMO SPECIMINE *publice dato se habere* PROBAVIT. Atqui quod ea occasione tam libere fassus est *Leibnitius*; si candor, si honor ei constet, ubique ac semper profiteri debet.

N° LXXVI. In Epistola sua 28 Maii 1697 ad *Wallisium* scripta sic narrat *Leibnitius*: *Methodum*, inquit, *Fluxionum profundissimi* Newtoni *cognatam esse methodo meæ differentiali non tantum animadverti postquam opus ejus* [Principiorum scilicet] *et tum prodiit; sed etiam professus sum in Actis Eruditorum, et alias quoque monui. Id enim candori meo convenire judicavi, non minus quam ipsius merito. Itaque communi nomine designare soleo Analyseos infinitesimalis; quæ latius quam Tetragonistica patet. Interim quemadmodum et* Vietæa *et* Cartesiana *methodus Analyseos speciosæ nomine venit; discrimina tamen nonnulla supersunt, ita fortasse et* Newtoniana *et* Mea *differunt in nonnullis*. Et in his quoque profitetur *Leibnitius*, cum *Newtoni Principia* prodiissent, se percepisse statim Affinitatem quæ inter geminas Methodos intercedit, et idcirco communi se utramque *Infinitesimalis Methodi* nomine vocitare, quin et candoris sui esse ut Affinitatem illam agnoscat. Atqui si pro homine candido haberi se postulat, idem hoc, quod agnovit olim, et nunc debet agnoscere. Quin et fatetur Methodum *Newtonianam* eo fere gradu suæ methodo prævisse, quo *Vietæam Cartesianæ*: atque ut inter has, sic inter suam et *Newtoni* discrimina quædam manere: et deinde ea enumerat, quibus *Methodum Newtoni* ampliasse et promovisse se arbitratur. Atqui Temporis illam Prærogativam, quam tum apud *Wallisium Newtono* concedebat, etiam adhuc et apud suos debet concedere.

Cum Discrimina illa sive Augmenta *Newtoni Methodo* a se addita memorat *Leibnitius*; in secundo loco ponit *Differentiales Æquationes*. Atqui Epistolæ illæ, quæ anno 1676 inter ipsos intercesserunt, clare monstrant *Newtonum* eo tempore Differentiales istas habuisse, *Leibnitium* vero minime. In tertio loco recenset *Æquationes Exponentiales*: atqui has quoque *Anglis* debet *Leibnitius*. *Wallisius*, in serierum interpolatione, consideravit fractos et negativos Dignitatum Indices: *Newtonus* in computationes Analyticas Fractos, Surdos, Negativos, et Indefinitos Dignitatum Indices introduxit, et Epistola

N° LXII 24 Octob. 1676 certiorem fecit *Leibnitium*, ad affectas Æquationes, quæ Dignitates eas quarum Indices Fracti vel Surdi erant, involverent, suam

Methodum se extendere. In Responso autem 21 Jan. 1677 dato, vicissim Nº LXIX
petit a *Newtono Leibnitius*, ut dicere vellet quid de Resolutione Æquatio-
num sentiret, involventium Dignitates quarum Indices essent indetermi-
nati; quales hæ essent $x^y + y^x = xy$, $x^x + y^y = x + y$. Atqui has ipsas
Æquationes nunc *Exponentiales* nominat, seque orbi Literato venditat pri-
mum earum Inventorem, hancque ut eximiam quandam Inventionem os-
tentat; nec tamen vel agnovit hactenus auxilia ad rem eam inveniendam a
Newtono sibi subministrata, nec vel uno Exemplo utilitatem ejus, ubi Digni-
tatum Indices sint Fluentes, ostendere valuit. Cum autem, ut credibile est,
nondum eam pro solita sua *Impatientia* præque talis Exempli inopia abje-
cerit; æquum est, ut speremus tandem eum aliquando mirificam ejus utili-
tatem publice ostensurum esse.

In Epistola ad *Leibnitium* 24 Octob. 1676 data *Newtonus* dixerat, se binas Nº LXIV.
inversa Tangentium Problemata et alia ejusmodi difficilia resolvendi Metho-
dos habere; quarum unam consistere *in assumendo seriem pro quavis ignota
Quantitate unde cetera commode possent deduci, et in conferendo homologos
Terminos suborientis Æquationis, pro determinandis assumptæ Seriei Terminis.*
Quid hic facit *Leibnitius*? Multos post annos, in *Actis* scilicet *Eruditorum*
Augusti 1693, hanc Methodum tamquam suam publicat, ejusque primam
sibi inventionem arrogat. Aut publice vero huic abrenuntiet; aut argumen-
tis vincat se eam invenisse, priusquam dictas *Newtoni* literas acceperit.

Illud quoque publice ei confitendum est, se *Oldenburgi* Epistolam 15 Apri-
lis 1675 accepisse: qua plurimæ series convergentes pro Curvis quadrandis,
et inprimis illa *Jacobi Gregorii* pro arcu dati Tangentis inveniendo, atque
inde Circulo quadrando continebantur. Hoc quidem privatim fassus est,
Epistola ad *Oldenburgum* propria manu 20 Maii 1675 scripta, quæque etiam Nº XXXVII
adhuc superest in *Libro* Regiæ Societatis *Epistolari*: nondum tamen publice
agnovit; ut tum sane factum oportuit, cum illam ipsam Seriem ut suam
maluit edere.

Porro illud quoque agnoscendum ei est publice, se extracta Epistolarum
Gregorianarum accepisse, quæ ipsius rogatu Parisios ei misit *Oldenburgus* Nº XLVI
mense Junio 1676; in quibus erat una *Gregorii* de ista serie 15 Feb. 1671, et
Newtoni alia de *Methodo Fluxionum*, 10 Decemb. 1672.

Quandoquidem autem in Epistola 28 Dec. 1675 *Oldenburgo* significavit Nº XLIII.
Leibnitius, se seriem illam cum amicis Parisiensibus *biennio ante*, commu-
nicasse, deque ea re *aliquoties* ad ipsum scripsisse; in alia item Epistola
12 Maii 1676, se de serie illa *ante aliquot annos* ad ipsum literas dedisse; Nº XLIV.
porro in alia 27 Aug. 1676 se seriem illam amicis ostendisse *triennio ante et* Nº LII.

amplius, hoc est, quam primum *Parisios* a *Londino* venisset: illud a *Leibnitio* jure expectamus, ut dicat qui evenerit, ut cum *Oldenburgi* Epistolam
N° XLII. 15 Apr. 1675 acciperet, illam ipsam seriem esse *suam* ignoraverit.

N° XXXII. XXXIII. In Epistolis 15 Jul. et 26 Octob. 1674 datis, non nisi *unam* seriem memorat *Leibnitius* pro Circuli Circumferentia; methodumque, qua ad hanc pervenerit, sibi etiam seriem obtulisse dicit, pro Arcu cujus sinus datus fuerit, etsi Arcûs proportio ad Circumferentiam totam sit ignota. Ergo ista Methodus, ex dato triginta graduum sinu, seriem ei suppeditavit pro Circumferentia tota. Quod si seriem quoque habuit pro tota Circumferentiâ a XLV graduum Tangente deductam, rogatur ut publice doceat, qua Methodo quæ ambas istas series ei dare posset, eo tempore sit usus: cum Methodus per figurarum Transmutationem nequaquam hoc efficere valeat. Rogatur insuper, ut rationem reddat, cur in istis Epistolis non nisi unam Circuli Quadraturam memoret.

Porro si anno 1674 jam tum Demonstrationem habuit Seriei pro inveniendo cujus sinus datus sit Arcu; rogatur ut eam in publicum proferat;
N° XLIV. dicatque cur in Epistola 12 Maii 1676 ab *Oldenburgo* peteret, ut ille *Newtoni* Demonstrationem pro ipsa illa Serie a *Collinio* adipisceretur; et qua tandem re *Newtoniana* series a sua illa differat. Quippe ex his omnibus non levis suspicio oritur, *Newtonianam* seriem pro reperiendo cujus sinus datus sit Arcu, *Leibnitio* dum in *Anglia* commoraretur esse traditam: illumque postea 1673 Parisiensibus eam amicis pro sua venditasse; proximoque anno etiam ad *Oldenburgum* quasi de sua literas dedisse, quo Demonstrationem sive Methodum Serierum ejusmodi inveniendarum expiscaretur. Anno vero insequente, cum *Oldenburgus* et istam de qua loquimur seriem et illam *Gregorianam* et sex præterea alias ad ipsum misisset, non diutius eam seriem arrogare sibi *Leibnitius* sustinuit, inopiâ Demonstrationis: seque dixit series istas lente examinare cumque suis comparare, quasi suæ illæ a seriebus ex *Anglia* missis essent diversæ. Denique cum seriei *Gregorianæ* Demonstrationem extudisset per Figurarum Transmutationem, Parisiensibus eam seriem amicis velut suam ostentare cœpit; ut ipse in *Actis Eruditorum* Apr. 1691, pag. 178 narrat; *Jam anno*, inquiens, 1675 *Compositum habebam Opusculum Quadraturæ Arithmeticæ ab Amicis ab illo tempore lectum*, etc. At Amicos istos celavit Epistolam, qua per *Oldenburgum* illam seriem nactus est; ipsique adeo *Oldenburgo* asseveravit, se uno alterove anno ante scriptam ejus Epistolam seriem istam repperisse. Porro et sequente anno, cum binas *Newtoni* series per *Georgium* quendam *Mohr* iteratò accepisset, sic de eis ad *Olden-*
N° XLV. *burgum* scripsit, ut numquam sibi antea visis, ab eoque petiit ut per *Colli-*

nium Newtoni pro eis inveniendis Methodum nancisceretur. Ceterum hanc gravem suspicionem si eluere volet *Leibnitius;* illud imprimis argumentis certis ostendat, se seriem istam *Gregorianam*, prinsquam per *Oldenburgum* eam accepisset, suo solius acumine repperisse.

Hoc quoque, prout æquum est, monstrabit *Leibnitius;* qua primùm Methodo diversas illas Regressionis Series pro Circulo et Hyperbola, a *Newtono* quidem ad ipsum missas 13 Jun. 1676, at in Epistola sua 27 sequentis Augusti sibi attributas, invenerit; antequam a *Newtono* eas accepisset. Nº XLIX. Nº LII.

Cumque ab ipso rogatus *Newtonus* Regressionis Methodum ei indicavisset; quam ut primum legit *Leibnitius*, neque suam esse agnovit, et ne intellexit quidem : postea vero quam percipere eam potuit, ut suam sibi arrogavit, olim scilicet a se inventam, sed in Chartis suis reconditis oblivione sepultam. Vel probet *Leibnitius*, si candidi æquique hominis nomen cupit auferre, se primum ejus Methodi inventorem esse, vel vero inventori concedat. Nº LXIV. Nº LXX.

In Literis ad *Oldenburgum* datis 3 Feb. $167\frac{2}{3}$ Proprietatem quandam seriei Numerorum, Naturalium, Triangularium, Pyramidalium, Triangulo-triangularium etc. ut inventum suum ostentavit *Leibnitius;* quoque majorem fidem faceret, mirari visus est D. *Pascalium* in *Triangulo* suo *Arithmetico* eam præterisse. Ceterum is Liber *Pascalii* anno editus est 1665, atque istam ipsam seriei ejus Proprietatem continet. Agnoscat itaque *Leibnitius*, Proprietatem istam minime a *Pascalio* fuisse præteritam; neque pergat sibi vindicare, cum veri inventoris injuria. Nº XXX

Abrenuntiet quoque methodo Differentiali *Newtoni;* neque se in partes ingerat, quasi secundus scilicet inventor. Secundis Inventoribus, etiam revera talibus vel exiguus vel nullus est honos; tituli vel juris nihil est. Quid cum istis igitur fiet, qui vel Secundos se fuisse nullis certis Argumentis possunt evincere? In literis ad D. *Sloane* 29 Decemb. 1711 datis, *Amicos* ait suos probe scire, quo pacto Differentialem Methodum invenerit. Quid *Amicos* nobis narrat? Ipse plane, aperte, sine tergiversatione dicat, qua eam via repperit. Nº XXX. Nº LXXXV.

In iisdem ad D. *Sloane* literis narrat, se *novennio* ante quam eam in lucem ederet, methodo potitum esse; hoc est, anno 1675 vel prius. Atqui certum est, 27 Aug. 1676 cum literis ad *Oldenburgum* mitteret, nondum illum habuisse eam. Quippe ibi affirmat, Problemata inversæ Tangentium Methodi, plurimaque alia, non posse ad series infinitas neque ad Æquationes aut Quadraturas reduci. Quomodo hæc duo conciliari inter se possint; ipse ubi otium est videbit.

Jam supra didicimus; *Leibnitium*, dum per *Angliam* et *Hollandiam* domum

6

rediret, dedisse operam *Slusianæ* pro Tangentibus Methodo promovendæ, et ad omne genus Problemata extendendæ; eaque causa generalem Tangentium Tabulam conficere voluisse. Nondum igitur veram istius Methodi Promotionem invenerat. Atqui semestri fere post tempore, cum in veram ejus Promotionem recens inciderat, rescripsit his verbis : Clarissimi Slusii *methodum Tangentium nondum esse absolutam Celeberrimo* Newtono *assentior:*
No LXVI. *et jam* A MULTO TEMPORE *rem Tangentium generalius tractavi, scilicet per Differentias Ordinatarum*. Bene sane, *a multo tempore*, nimirum *semestri*. Excogitet jam aliquid pro *candore* suo *Leibnitius*, cur tantillum temporis ut *multum* deprædicaverit; nisi eo consilio ut inventoris titulum *Newtono* præriperet, fidemque faceret se diu antequam *Newtoni* Literis eam edoctus esset, differentialem Methodum penes se habuisse.

In Actis Eruditorum Junii 1696, dum duos priores *Wallisianorum* operum Tomos recensent editores (hoc est, ipse *Leibnitius*) ita narrant : *Ceterum ipse* Newtonus, *non minus candore quam præclaris in rem Mathematicam meritis insignis, publice et privatim agnovit* Leibnitium, *tum cum interveniente celeberrimo Viro* Henrico Oldenburgo *Bremensi Societatis Regiæ Anglicanæ tunc Secretario inter ipsos (ejusdem jam tum Societatis socios) Commercium intercederet, id est jam fere ante annos viginti et amplius, Calculum suum differentialem, seriesque infinitas et pro iis quoque Methodos generales habuisse; quod* Wallisius *in Præfatione operum, factæ inter eos communicationis mentionem faciens, præteriit, quoniam de eo fortasse non satis ipsi constabat. Cæterum Differentiarum consideratio* Leibnitiana, *cujus mentionem facit* Wallisius (*nequis scilicet, ut ipse ait, causaretur de Calculo Differentiali nihil ab ipso dictum fuisse*) *meditationes aperuit, quæ aliunde non æque nascebantur.* Ex his patet a *Leibnitio* lectam esse Præfationem illam *Wallisii*, in qua narrat is *Newtonum* (anno 1676) Methodum suam fluxionum *Leibnitio* explicavisse, *quam tamen decennio ante vel amplius* Newtonus *invenisset.* Atqui a *Newtono* numquam creditum est, *Leibnitium* ante annum 1677 *Differentialem methodum* invenisse : ipseque adeo *Leibnitius* in *Actis Erud.* April. 1691, p. 178, fassus est, inventam esse postquam domum *Parisiis* redisset ad negotia publica capessenda, hoc est, post annum 1676. Quod autem ad generalem ejus *Infinitarum Serierum* Methodum attinet; tantum abest ut Generalis dicenda sit; ut vel exiguæ vel nullius prorsus sit utilitatis; nisi forte ut ansam *Leibnitio* præbeat, qua *Gregorianam* pro Circulo Quadrando Seriem sibi adhamet transferatque.

In Responso ad D. *Fatium* in *Actis Erud.* 1700, p. 203, editis hæc habet *Leibnitius*. *Ipse* [Newtonus] *scit unus omnium optime, satisque indicavit publice*

cum sua Mathematica Naturæ Principia publicaret, Anno 1687, *nova quædam inventa Geometrica, quæ ipsi communia mecum fuere,* NEUTRUM LUCI AB ALTERO ACCEPTÆ, *sed meditationibus quemque suis debere, et a me decennio ante* [i. e. anno 1677] *exposita fuisse.* Atqui in Libro *Principiorum* hic ad partes vocato, minime agnovit *Newtonus* suis eam Methodum viribus invenisse *Leibnitium,* non a *Newtonianis* illis Epistolis adjutum : *Wallisiusque* nuper contrarium asseveraverat, refellente tum nemine vel contradicente. Quod si postea eam sine ope *Newtoni* quam maxime invenisset *Leibnitius;* secundis tamen Inventoribus exilis prorsus est gratia, nec nisi in inferiori subsellio locus; ne dicam, jus omnino nullum.

In eodem ad *Fatium* Responso hæc quoque habet *Leibnitius: Certe cum elementa Calculi mea edidi anno* 1684, *ne constabat quidem mihi aliud de inventis ejus* [sc. Newtoni] *in hoc genere, quam quod ipse olim significaverat in literis, posse se Tangentes invenire non sublatis irrationalibus, quod* Hugenius *quoque se posse mihi significavit postea, etsi cæterorum ejus calculi adhuc expers. Sed majora multo consecutum* Newtonum, *viso demum libro* Principiorum *ejus, satis intellexi.* In his iterum agnovit, librum *Principiorum* ad *Newtonianam* Fluxionum Methodum sibi aditum patefecisse : idem tamen ipse jam negat, quicquam illius Methodi in dicto Libro contineri. In his simulat, se prius quam iste liber prodiisset nihil amplius de *Newtoni* inventionibus scivisse, quam quod Methodum quandam Tangentium habuerit : et ex isto demum Methodum ejus Fluxionum percepisse : atqui in Epistola 21 Jun. 1677 data, agnovit Methodum eam ad Curvilinearum Figurarum Quadraturas se extendere, suæque similem esse. Verba ejus hæc sunt : *Arbitror quæ celare voluit* Newtonus *de Tangentibus ducendis, ab his non* N° LXVI. *abludere. Quod addit, ex hoc eodem fundamento Quadraturas quoque reddi faciliores me, in sententia hac confirmat; nimirum semper figuræ illæ sunt quadrabiles quæ sunt ad æquationem differentialem.*

Newtonus in tribus illis Epistolis, quas (ut diximus) ab *Oldenburgo Leibnitius* acceperat, tam generalem esse suam Methodum dixerat, ut ope N° XXVI. XLVI, XLVIII, LIV. Equationum, Finitarum et Infinitarum, determinaret Maximas et Minimas, Tangentes, Areas, Solida Contenta, Centra Gravitatis, Longitudines ac Curvitates Curvarum Linearum Curvilinearumque Figurarum, idque sine ablatione Radicalium; extenderetque se ad similia Problemata in Curvis (ut vulgo vocantur) Mechanicis, itemque ad Problemata Tangentium inversa, et ad omnia fere, nisi forte Numeralia quædam, qualia sunt *Diophanti. Leibnitius* vero in Ep. 27 Aug. 1676, vix credere se posse finxit, eam Metho- N° LI. dum tam esse Generalem. *Newtonus* in prima ex tribus illis Epistola Tan- N° XXVI.

gentium Methodum proposuit ex generali ea Methodo deductam, exemploque eam illustravit; generalisque methodi Ramum vel Corollarium esse monuit; et ejusmodi esse *Slusianam*, quæ nondum tum prodierat, conjecit. Hac re excitatus *Leibnitius* meditabatur siqua via promovere posset Methodum *Slusianam*, eamque ad omnia Problemata extendere, quemadmodum
N° LVIII. jam ante ex ejus Literis monstravimus. In tertia vero Epistola suam Methodum illustraverat *Newtonus* per Theoremata pro Quadraturis et eorum
N° LXVI. exempla. Quibus adjutus *Leibnitius*, in Ep. 21 Junii 1677 Methodum suam cum *Newtoniana* congruere dixit, ducendo Tangentes, producendo Methodum *Slusii*, procedendo sine Fractionum et Surdarum ablatione, Quadraturasque reddendo multò expeditiores. His tot et toties actis; ad Conterraneos suos affirmare, se cum Differentialem Methodum anno 1684 ederet, nihil tum amplius de *Newtoni* invento inaudivisse, quam quod is Methodum quandam Tangentium haberet, cujus tandem est hominis?

Vide Acta Eruditorum pro mense Nov. 1684. Porro eo tempore *Leibnitius* de sua Methodo nihil aliud explicaverat, nisi per eam Tangentes duci posse, Maximasque et Minimas determinari, sine ademptione Fractionum vel Surdarum. Hoc vero totum etiam per *Newtoni* Methodum effici posse certo sciebat; neque candidi erat hominis id dissimulare. Cum autem hactenus suam Methodum exposuisset *Leibnitius*, addidit se hic *Geometriæ multo sublimioris* initia posuisse, pervenientis ad difficillima quæque et utilissima Problemata, quæ sine Calculo Differentiali AUT SIMILI vix solvi possint. Quid vero illud AUT SIMILI sibi vellet, qui quæso Conterranei ejus sine Œdipode poterant intelligere? Enimvero planis disertisque verbis dictum ab eo oportuit, SIMILEM illam quam innuit Methodum *Newtoni* fuisse; quam latè ea pateret, quam a longo tempore reperta esset, prout ipse ex *Anglia* didicisset, narrare; suamque illa posteriorem esse confiteri. Hoc omnes controversias præcidisset; hoc candidi et honesti viri officium erat. Horum tamen omnium quasi oblitus, suis ille Conterraneis in Responso ad *Fatium* prædicat, se cùm Anno 1684 Calculi sui Elementa ederet, nihil tum de ulla SIMILI methodo inaudivisse; nihil de ulla alia nisi ad ducendas Tangentes : quod qualis hominis fuerit, aliis dicendum relinquo.

Illud denique *Leibnitio* est expediendum; quî factum sit ut in *Responsis* suis ad *Wallisium* et *Fatium*, quorum uterque Primi ejus Methodi Inventoris gloriam *Newtono* detulerat, nihil tum ipse de se ut Priore Inventore dicebat; sed senum Geometrarum mortem operiebatur, aliosque qui superstites adhuc sunt pro Novitiis habebat : quin et ipsum *Newtonum* adortus cum quoquam se alio certaturum negabat. Atqui dixerat ei *Newtonus*, in

Ep. 24 Octob. 1676, se tum ante annos quinque quo quietius ætatem ageret, consilium publicandi quæ de hoc Argumento scripserat abjecisse : et ex eo quidem tempore studiose vitavit omnes de rebus Philosophicis ac Mathematicis Disputationes; quin et a Commercio de his rebus Literario, ut Disputationibus ansam porrigente, data opera abstinuit; eandemque ob causam, neque de *Leibnitio* queri prius sustinuit, quam in *Actis* se *Lipsiensibus* ut Plagiarium traduci vidisset, *Keilliumque* eo tantum nomine in lites trahi, quod ab hoc eum crimine vindicare conatus sit. N° LVII.

Insimulatum quidem est, quasi Regia Societas Sententiam contra *Leibnitium* in hac causa tulisset, non utraque parte audita. Non ita se res habet : nondum sententiam tulit Societas. *Leibnitius* quidem postulabat a Societate, ut *Keillium* inauditum damnare vellet : adeo ut ipse jure eodem sic damnari potuisset; cum idem sit jus *Seio* quod *Titio*, *Keillio* quod *Leibnitio*. Cumque accusationem suam adversus *Keillium* destituisset *Leibnitius*, jure potuisset Societas notam illi inurere. Ea vero certorum tantum hominum Consessum legit, qui scrutarentur Epistolas atque Chartas, quæ de his rebus in Archivis Societatis habentur; et secundum illas Chartas Epistolasque rem ipsam ut erat Societati narrarent. Non enim ideo lecti erant, ut *Leibnitium* vel *Keillium*, sed ut veteres Chartas examinarent : in eaque re probe se et honeste gesserunt. Numerosus quippe Consessus erat, e viris eruditis diversarum Nationum lectus : quorum fidem in Epistolis Chartisque examinandis, fideliterque edendis, nihil quicquam ullius hominis gratia addendo vel omittendo vel mutando, Societas tota comprobavit. Quin et ipsæ Ep. atque Chartæ, Societatis jussu, conservantur adhuc; ut si quis velit, ibi consuli et cum edito *Commercio Epistolico* comparari possint. Illud interim submonendus est *Leibnitius;* cum id Societati impingit, quasi inauditum eum condemnatum isset, id ob eam rem per statutum ejus quoddam commeritum se esse, ut nomen ejus inde expungatur [1].

Philosophia porro, quam in *Principiis* suis atque *Opticis Newtonus* excoluit, est Experimentalis : illa scilicet, quæ *Causas* rerum non fidentius docet, quam per Experimenta confirmari queant; neque implenda est Opinationibus, quæ per Phænomena nequeunt probari. Et idcirco in *Opticis* suis,

[1] La phrase anglaise semble encore plus dure, l'injonction etant faite au nom de l'anonyme, qui est Newton. « And in the mean I take the liberty to acquaint him, that by taxing » the Royal Society with injustice, in giving sentence against him without hearing both par- » ties, he has transgressed one of their statutes, which makes its expulsion to defame them. » *Phil. Trans.* 1715, pag. 221. (J. B. B.)

res experimentis firmatas ab illis quæ incertæ adhuc maneut, distinxit *Newtonus:* et incertas aliquot ejusmodi sub finem Opticorum ut *Quærenda* proposuit. Eandemque ob causam, in *Principiorum* præfatione, cum memorasset Motus Planetarum, Cometarum, Lunæ ac Maris, ceu in libro illo de Gravitatis theoria deductos, hæc addidit : *Utinam cætera Naturæ Phænomena ex Principiis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent ut nonnihil suspicer, ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particulæ per causas nondum cognitas, vel in se mutuo impelluntur et secundum regulares figuras cohærent, vel ab invicem fugantur et recedunt : quibus viribus ignotis, Philosophi hactenus Naturam frustra tentarunt.* Et sub finem ejus Libri, in secunda Editione, narrat ; ut præ inopia Experimentorum tanto negotio sufficientium non aggressus sit Leges Actionum illius Spiritus sive Agentis describere, per quem efficitur hæc Attractio. Quin et eandem ob causam de *Gravitatis Causa* nihil pronuntiat ; quod nulla Experimenta sive Phænomena ad manum essent, quæ causam illam certo indicare possent. Atque hoc in *Principiis* suis, sub ipso initio, abunde declaraverat, his verbis : *Virium causas et sedes Physicas jam non expendo.* Et paulo post : *Voces Attractionis, Impulsus vel Propensionis cujuscunque in centrum indifferenter et pro se mutuo promiscue usurpo, has Vires non Physice sed Mathematice tantum considerando. Unde caveat Lector ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis, causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel Centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero.* Et sub finem Optices : *Quâ causa efficiente hæ attractiones* [sc. gravitas, visque magnetica et electrica] *peragantur, hic non inquiro. Quam ego attractionem appello, fieri sane potest ut ea efficiatur impulsu vel alio aliquo modo nobis incognito. Hanc vocem Attractionis ita hic accipi velim, ut in universum solummodo vim aliquam significare intelligatur qua corpora ad se mutuo tendant, cuicunque demum causæ attribuenda sit illa vis : Nam ex Phænomenis naturæ illud nos prius edoctos esse oportet quænam corpora se invicem attrahant, et quænam sint leges et proprietates istius attractionis, quam in id inquirere par sit, quanam efficienti causa peragatur attractio.* Pauloque inferius, easdem Attractiones tamquam vires considerat, quas in rerum Natura existentiam habere, licet causæ earum nondum sint cognitæ, per Phænomena constat : distinguitque eas a Qualitatibus occultis, quæ a specificis rerum formis fluere existimantur. Et in Scholio sub extremum *Principiorum*, cum Gravitatis proprietates memorasset, hæc addidit : *Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex Phænomenis nondum potui deducere, et Hypotheses non fingo. Quicquid enim ex Phænomenis non deducitur,*

Hypothesis vocanda est; et Hypotheses, seu Metaphysicæ, seu Physicæ, seu Qualitatum occultarum, seu Mechanicæ, in Philosophia experimentali locum non habent. — Satis est quod Gravitas revera existat, et agat secundum leges a nobis expositas, et ad Corporum cœlestium et Maris nostri motus omnes sufficiat. Jam vero, post hæc omnia quæ consulto præmonuerat *Newtonus*, quis non miretur, ideo eum a quoquam sugillari, quod Causas Gravitatis aliarumque Attractionum non per Hypotheses explicet? quasi criminis loco esset; certis esse contentum, incerta vero dimittere. Et tamen *Actorum Eruditorum* (anno 1714 mense Martio p. 141, 142) Editores id *Newtono* exprobrant, quod causam Gravitatis neget esse Mechanicam; asseruntque, si Spiritus ille vel Agens, quo Electrica fit Attractio, non sit Æther vel subtilis Cartesii Materia, quavis id Hypothesi contemtius esse; ut fortasse sit Principium *Henrici Mori* Hylarchicum. Quin et ipse *Leibnitius*, in tractatu *De bonitate Dei*, et in Epistolis ad *Hartsoekerum* atque alibi, *Newtono* id vitio vertit, quasi Gravitatem faceret Naturalem quandam et Essentialem corporum Proprietatem, immo occultam Qualitatem, ac denique Miraculum. Atque hujusmodi cavillationibus, homines hi conterraneis suis persuasum esse cupiunt, judicio eum et acumine parum valere; neque eum esse qui Methodum Infinitesimalem rem tam arduam invenire potuisset.

Illud profecto confitendum est, in Philosophia tractanda *Newtonum* inter et *Leibnitium* plurimum interesse. Prior ille eo usque progreditur, quo Phænomenorum et Experimentorum evidentia eum ducit; et ubi illa deficit, pedem sistit: posterior Hypothesibus suis scatet totus; easque proponit non Experimentis examinandas, sed clausis oculis credendas. Ille, inopia Experimentorum, quæ Causam Gravitatis certo indicare possint, utrum Mechanica fuerit necne, non affirmat: Hic, si Mechanica non sit, *Perpetuum esse Miraculum* pronunciat. Ille (atque id quoque non definiens sed quærens) Creatoris Potentiæ tribuit, quod minimæ quæque Materiæ partes sint duræ: Hic illam Materiæ duritiem Conspirantibus quibusdam motibus imputat; et, si causa ejus alia ponatur quam Mechanica, pro *Perpetuo* eam *Miraculo* deridendam propinat. Ille Motum in Homine Animalem, non audet affirmare, mere esset Mechanicum: Hic pure Mechanicum esse audacter asserit; cum ex Hypothesi ejus de *Harmonia præstabilita*, numquam Anima vel Mens hominis sic agat in corpus, ut Motus hujus vel impediat vel adjuvet. Ille Deum asserit, (*Deum in quo vivimus et movemur et sumus*) esse Omnipræsentem, non tamen ut Mundi Animam: Hic, non Mundi quidem Animam esse, sed INTELLIGENTIAM SUPRAMUNDANAM; ex quo illud consequi videatur, Non posse Deum intra Mundi limites quicquam efficere,

nisi per Miraculum prorsus incredibile. Ille Philosophis præcipit, ut à Phænomenis et Experimentis ad eorum causas progrediantur, atque inde ad Causarum istarum Causas, et sic deinceps donec ad Primam Causam perveniatur. Hic omnes causæ primæ actiones pro *Miraculis* haberi, omnesque Leges per Dei Voluntatem, Naturæ impressas pro *Perpetuis Miraculis Occultisque Qualitatibus* censeri; et idcirco ex Philosophia exulare jubet. Siccine vero agitur? An perpetuæ et universales Naturæ leges, si ex potentia Dei, Causæve adhuc nobis incognitæ Actione deriventur, pro *Miraculis* et *Qualitatibus occultis*, hoc est ex ejus sententiâ, pro *Monstris* et *Absurditatibus*, sunt exsibilandæ? Omnia porro pro Dei existentia de Naturæ Phænomenis sumpta Argumenta, idcircòne sunt explodenda; quia *novis* quis ea Nominibus et *Ignominiosis* infamet? An, ut *superstitiosa* et *absurda*, rejicietur Philosophia Experimentalis, quia neque ultra experimenta definire quicquam vult; neque adhuc per Experimenta probare potest, naturæ omnia Phænomena per Causas mere Mechanicas posse solvi? Res profectò digna est, quæ et mature et serio consideretur.

COMMERCIUM
EPISTOLICUM
D. *JOHANNIS COLLINS*,
ET ALIORUM
DE
ANALYSI
PROMOTA:
JUSSU
SOCIETATIS REGIÆ
In lucem editum.

LONDINI[1]:
Typis PEARSONIANIS, ANNO M DCC XII.

(1) [Londini : Anno M DCC XII]. Reproduction inexacte.

AD LECTOREM.

Quam ob causam editæ sint hæ Epistolæ Chartulæque collectaneæ, apparebit ex Literis D. Leibnitii *et* D. Keillii *in fine subjunctis. Offensionem attulerat* D. Leibnitio *nonnulla, quæ scripto prodidit* D. Keillius *in Actis* Londinensibus *anno* 1708, *injuriam* D. Newtono *oblatam propulsans. Datis igitur ad Societatis Regalis Secretarium literis, de calumniâ questus* D. Leibnitius, *remedium a Societate petiit; idque eos æquum credidit judicaturos, ut* D. Keillius *culpam suam publicè fateretur.* D. Keillio *ea est potius visa potior, ut ad illa, quæ questus erat* D. Leibnitius, *literis scriptis responderet; Quibus in literis quæ antea ediderat, et exposuit plenius et vindicavit.* D. Leibnitius *nequaquam his satis sibi factum arbitratus, literas alteras ad Societatem dedit; in quibus adhuc de D.* Keillio *questus*, novum *eum* hominem *appellat*, parumque peritum rerum anteactarum cognitorem, nec mandatum ab eo, cujus interesset, habentem; *Societatisque* æquitati committit, annon coercendæ sint vanæ et injustæ vociferationes.

Versabatur in Angliâ *D.* Leibnitius *ineunte anno* 1673, *iterumque mense* Octobri 1676; *et interjecto illo temporis intervallo in* Galliâ *egit. Quo enim temporis spatio, mutuis acceptis datisque literis, commercium habuit cum D.* Oldenburgo, *et,* Oldenburgi *operâ*[1]*; cum D.* Collinio *itidem, et nonnunquam etiam cum D.* Newtono. *Quid autem ille ex* Anglis *tandem, vel tum cum* Londini *esset, vel ex literis istis mutuò datis, edidicerit, in ea ferè vertitur hæc omnis quæstio. D.* Oldenburgus *et* Collinius *jam diu obierunt; D.* Newtonus *autem tum* Cantabrigiæ *egit; parumque amplius novit, quam quod ex literis ipsius a D.* Wallisio *deinceps editis apparet. D.* Newtonus *neque a D.* Keillii *partibus Testis esse potest, nec D.* Leibnitius *ipse a suis: Alius autem in vivis Testis est nullus. Societas itaque Regalis, a D.* Leibnitio *bis adversus* Keillium *appellata, selectorum ex Societate arbitrorum consessum constituit, qui literas literarumque transcriptarum libellos, aliasque chartulas a D.* Oldenburgo *penes Societatem relictas, et siquid inter D.* Collinii *schedas repertum huc faceret, perscrutarentur, Sententiamque suam ad Societatem referrent; jussitque tandem ut Sententia illa a selectorum arbitrorum consessu relata, unà cum ipsis literarum aliarumque chartularum excerptis, emitteretur.*

1 [*Tandem*]. Intercalation

Cum D. Newtonus *Analysin istam scripto traderet, quæ sub initium horum Collectaneorum impressa est; habuit jam tum* † *Methodum generalem æquationes finitas in infinitas resolvendi, et æquationes tum finitas tum infinitas applicandi ad Problemata solvenda, ope proportionum Augmentorum momentaneorum Quantitatum nascentium et augescentium. Augmenta hæc appellat D.* Newtonus *Particulas et Momenta; D.* Leibnitius *autem Infinitesimales, Indivisibiles et Differentias. Quantitates augescentes appellat D.* Newtonus *Fluentes; D.* Leibnitius *autem Summas. Et velocitates augmenti appellat D.* Newtonus *Fluxiones; istasque Fluxiones exponit per quantitatum fluentium momenta.*

† De hac Methodo ex Methodis Serierum et Fluentium composita scripsit infra Newtonus, pag. 14, 15, 18, 30, 55, 56, 71, 85, 86.

Quæ pars hujus Methodi in eo sita est, ut æquationes finitæ in infinitas resolvantur, eam cum D. Leibnitio, *rogatu suo, communicavit* D. Newtonus, *literis ad illum datis* Junii 13 *et* Octobris 24. 1676. *Reliquam hujus Methodi partem, postquam eousque attigerat*[2] *ut eam satis*[3] *obviam factam existimaret; ne sibi deinceps subriperetur prinsquam eam exponere visum foret, literis occultis ita celavit, quo modo alias* Galilæus *atque* Hugenius *fecerant. Hujus posterioris partis inventionem sibi vindicat D.* Leibnitius : *D.* Keillius *autem eam D.* Newtono *adserit;* Keillioque *suffragatur Sententia selectorum e Societate arbitrorum consessis. Alios tamen Exteros, qui methodum istam a D.* Leibnitio *acceperint aut aliter obtinuerint, nihil quidquam in his Collectaneis est quod ullo pacto afficiat. Illi, quid inter D.* Leibnitium *et D.* Oldenburgum *commercii esset, ignorabant. Illis, quod Methodum, quam utilem esse compererant, in rem suam adhibuerint atque excoluerint; id vero laudi est dandum.*

* Vid. pag. 72, lin. 1.

[1] *Subjunctæ sunt Epistolis Annotationes quædam; quo Lectores, quibus minus est otii, et Epistolas inter se facilius conferre, et semel perlectas intelligere queant.*

---

1 [N° VI, VII, XXII, XLVII, LIII, LVI.] Altération.
Voyez N° X, XI, XXVI, XLIX, L, LVII, LXIV. [F. L.]

2 [*Explicuerat*]. Altération.

3 [N° LIII]. Changement.
Voyez N° LVII. [F. L.]

Commercium Epistolicum

D. *JOHANNIS COLLINS*,

ET ALIORUM,

De ANALYSI promota:

Jussu *SOCIETATIS REGIÆ*

in lucem editum.

Excerpta ex Epistola reverendi viri D. Isaaci Barrow *ad D.* J. Collins, Cantabrigiæ 20 Julii 1669 *datâ, cujus habetur Autographon.* Nº 1

* Amicus quidam apud nos commorans, qui eximio in his rebus pollet ingenio, nudiustertius chartas quasdam mihi tradidit, in quibus Magnitudinum dimensiones supputandi Methodos, *Mercatoris* methodo pro Hyperbola similes, maxime vero Generales, descripsit, simulque Æquationes resolvendi, quæ, ut opinor, tibi placebunt, quas una cum proximis literis ad te mittam.

* A Friend of mine here, that hath an excellent Genius to these Things, brought me the other Day some Papers, wherein he hath set down Methods of calculating the Dimensions of Magnitudes, like that of Mr. *Mercator* for the Hyperbola, but very general, as also of Resolving Equations, which I suppose will please you, and I shall send them by the next.

Ex Epistola ejusdem ad eundem, 31 Julii 1669 *data, pariterque ipsius* Barrovii *manu scripta.*

* Mitto quas pollicitus eram Amici chartas, quæ uti spero haud parum te oblectabunt. Remittas, quæso, quum eas quantum tibi visum fuerit perlegeris; id enim postulavit Amicus meus, cum primum eum rogavi, ut eas tecum communicare mihi liceret. Quantocyus igitur, obsecro, te eas recepisse fac me certiorem, quod illis metuo, quippe qui eas per Veredarium

publicum ad te mittere non dubitaverim, quo tibi morem gererem quam citissime.

* I send you the Papers of my Friend I promis'd, which I presume will give you much Satisfaction: I pray, having perused them so much as you think good, remand them to me, according to his desire, when I ask'd him the Liberty to impart them to you; I pray give me Notice of your receiving them, with your soonest Convenience, that I may be satisfied of their Reception; because I am afraid of them, venturing them by the Post, that I may not longer delay to correspond with your desire.

Ex Epistola ejusdem ad eundem, 20 Aug. 1669 data, cujus etiam comparet Autographon.

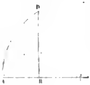
† Amici chartas tibi placuisse gaudeo; est illi nomen *Newtonus*, Collegii nostri Socius, et juvenis (secundus enim, ex quo Artium Magistri gradum cepit, jam agitur annus), et qui, eximio quo est acumine, permagnos in hac re progressus fecit. Illas, si vis, cum Nobili Domino Vicecomite *Brounkero* communica.

† I am glad my Friend's Paper gives you so much Satisfaction; his Name is Mr. *Newton*, a Fellow of our College, and very young (being but the second Year Master of Arts), but of an extraordinary Genius and Proficiency in these Things; you may impart the Papers, if you please, to my Lord *Brounker*.

N° II. *Exemplar dictarum chartarum; manu D. Collins exaratum et in scriniis ejus repertum, quod cum ipsius D. Newtoni Autographo collatum ad verbum consentire invenimus. Hujus autem titulus est*

DE ANALYSI PER ÆQUATIONES NUMERO TERMINORUM INFINITAS.

Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accurate demonstratam habes.



Basi AB Curvæ alicujus AD, sit applicata BD perpendicularis: Et vocetur AB = x, BD = y, et sint a, b, c, etc. Quantitates datæ, et m, n, Numeri Integri. Deinde,

Curvarum Simplicium Quadratura.

Reg. I. *Si* $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} =$ *Area* ABD.

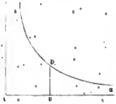
Res exemplo patebit.

1. Si $x^2\left(=1x^{\frac{2}{1}}\right)=y$, hoc est, $a=1=n$, et $m=2$; Erit $\frac{1}{3}x^3=ABD$.

2. Si $4\sqrt{x}\left(=4x^{\frac{1}{2}}\right)=y$; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(=\frac{8}{3}\sqrt{x^3}\right)=ABD$.

3. Si $\sqrt[3]{x^5}\left(=x^{\frac{5}{3}}\right)=y$; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}\left(=\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}\right)=ABD$.

4. Si $\frac{1}{x^2}(=x^{-2})=y$, id est, si $a=1=n$, et $m=-2$;



Erit $\left(-\frac{1}{1}x^{\frac{-1}{1}}=\right)-x^{-1}\left(=-\frac{1}{x}\right)=\alpha BD$, infinite versus α protensæ, quam Calculus ponit negativam, propterea quod jacet ex altera parte Lineæ BD.

5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}}\left(=x^{-\frac{3}{2}}\right)=y$;

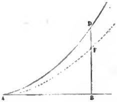
Erit $\left(-\frac{2}{1}x^{-\frac{1}{2}}=\right)\frac{2}{-\sqrt{x}}=BD\alpha$.

6. Si $\frac{1}{x}(=x^{-1})=y$; Erit $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}}=\frac{1}{0}x^0=\frac{1}{0}\times 1=\frac{1}{0}=$ Infinitæ, qualis est Area Hyperbolæ ex utraque parte Lineæ BD.

Compositarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

REG. II. *Si valor ipsius y ex pluribus istiusmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ a singulis Terminis emanant.* Nº III.

Exempla Prima.



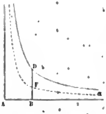
Si $x^2+x^{\frac{3}{2}}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=ABD$.

Etenim si semper sit $x^2=BF$, et $x^{\frac{3}{2}}=FD$, erit, ex præcedente Regula, $\frac{1}{3}x^3=$ superficiei AFB descriptæ per Lineam BF, et $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=AFD$ descriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ toti ABD.

Sic si $x^2 + x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ ABD.

Et si $3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4 = y$; Erit $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - x^5 =$ ABD.

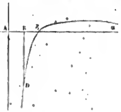
Exempla Secunda.



Si $x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}} = y$; Erit $-x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} = \alpha$BD.

Vel si $x^{-2} - x^{-\frac{3}{2}} = y$; Erit $-x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}} = \alpha$BD.

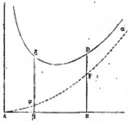
Quarum signa si mutaveris, habebis Affirmativum valorem $\left(x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}} \text{ vel } x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right)$ superficiei αBD, modo tota cadat supra basin ABα.



Sin aliqua pars cadat infra (quod fit cum Curva decussat suam Basin inter B et α, ut hic vides in δ) ista parte a parte superiori subducta, habebis valorem Differentiæ: Earum vero Summam si cupis, quære utramque Superficiem seorsim, et adde. Quod idem in reliquis hujus Regulæ exemplis notandum volo.

Exempla Tertia.

Si $x^2 + x^{-2} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - x^{-1} =$ Superficiei descriptæ. Sed hic notandum est, quod dictæ Superficiei partes sic inventæ jacent ex diverso latere Lineæ BD.



Nempe, posito $x^2 =$ BF, et $x^{-2} =$ FD; Erit $\frac{1}{3}x^3 =$ ABF Superficiei per BF descriptæ, et $-x^{-1} =$ DFα Superficiei descriptæ per DF.

Et hoc semper accidit cum Indices $\left(\frac{m+n}{n}\right)$ rationum Basis x in valore Superficiei quæsitæ, sint variis signis affecti. In hujusmodi Casibus, pars aliqua BD$\delta\beta$ Superficiei media (quæ sola dari poterit, cum Superficies sit utrinque infinita) sic invenitur.

Subtrahe Superficiem ad minorem Basin Aβ pertinentem, a Superficie ad majorem Basin AB pertinente, et habebis βBDδ Superficiem differentiæ Basium insistentem. Sic in hoc Exemplo.

Si $AB = 2$, et $A\beta = 1$; Erit $\beta BD\delta = \frac{17}{6}$:

Etenim Superficies ad AB pertinens (viz. $ABF - DF\alpha$) erit $\frac{8}{3} - \frac{1}{2}$ sive $\frac{13}{6}$; et Superficies ad $A\beta$ pertinens (viz. $A\varphi\beta - \delta\varphi\alpha$) erit $\frac{1}{3} - 1$, sive $-\frac{2}{3}$: et earum differentia (viz. $ABF - DF\alpha - A\varphi\beta + \delta\varphi\alpha = \beta BD\delta$) erit $\frac{13}{6} + \frac{2}{3}$ sive $\frac{17}{6}$.

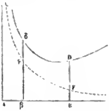
Eodem modo, si $A\beta = 1$, $AB = x$; Erit $\beta BD\delta = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$. :

Sic si $2x^3 - 3x^5 - \frac{2}{3}x^{-4} + x^{-\frac{3}{5}} = y$, et $A\beta = 1$;

Erit $\beta BD\delta = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{9}x^{-3} + \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} - \frac{49}{18}$.

Denique notari poterit quod si quantitas x^{-1} in valore ipsius y reperiatur, iste Terminus (cum Hyperbolicam superficiem generat) seorsim a reliquis considerandus est.

Ut si $x^2 + x^{-3} + x^{-1} = y$: Sit $x^{-1} = BF$, et $x^2 + x^{-3} = FD$, ac $A\beta = 1$;



Et erit $\delta\varphi FD = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^{-2}$, utpote quæ ex Terminis $x^2 + x^{-3}$ generatur.

Quare, si reliqua Superficies $\beta\varphi FB$, quæ Hyperbolica est, ex Calculo aliquo sit data, dabitur tota $\beta BD\delta$.

Aliarum Omnium Quadratura.

REG. III. *Sin valor ipsius* y, *vel aliquis ejus Terminus sit præcedentibus magis compositus, in Terminos Simpliciores reducendus est; operando in Literis ad eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes solvunt; et ex istis Terminis quæsitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas deinceps elicies.* N° IV.

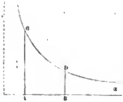
Exempla Dividendo.

Sit $\frac{aa}{b + x} = y$; Curva nempe existente Hyperbola.

Jam ut Æquatio ista a Denominatore suo liberetur, Divisionem sic

instituô.

$$(b+x)\ aa+o\left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}\ldots\right.$$



$$\begin{array}{l}
aa+\frac{aax}{b} \\
\hline
o-\frac{aax}{b}+o \\
-\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2} \\
\hline
o+\frac{aax^2}{b^2}+o \\
+\frac{aax^2}{b^2}+\frac{aax^3}{b^3} \\
\hline
o-\frac{aax^3}{b^3}+o \\
-\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4} \\
\hline
o+\frac{aax^4}{b^4} \\
\text{etc.}
\end{array}$$

Et sic vice hujus $y=\frac{aa}{b+x}$, nova prodit $y=\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}$, etc., serie istac infinite continuata; Adeoque (per Regulam Secundam) Area quæsita ABDC æqualis erit ipsi $\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{2b^2}+\frac{a^2x^3}{3b^3}-\frac{a^2x^4}{4b^4}$, etc. infinitæ etiam seriei, cujus tamen Termini pauci initiales sunt in usum quemvis satis exacti, si modo x sit aliquoties minor quam b.

Eodem modo, si sit $\frac{1}{1+xx}=y$, Dividendo prodibit

$$y=1-x^2+x^4-x^6+x^8,\ \text{etc}$$

Unde (per Regulam Secundam)

$$\text{erit ABDC}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9,\ \text{etc.}$$

Vel si Terminus xx ponatur in divisore primus, hoc modo $(xx+1)$, prodibit $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}$, etc. pro valore ipsius y; Unde (per Regulam Secundam)

$$\text{erit BD}\alpha=-x^{-1}+\frac{1}{3}x^{-3}-\frac{1}{5}x^{-5}+\frac{1}{7}x^{-7},\ \text{etc.}$$

Priori modo procede cum x est satis parva, posteriori cum satis magna supponitur.

Denique si $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = y$; Dividendo prodit

$$2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13x^2 + 34x^{\frac{5}{2}}, \text{ etc.},$$

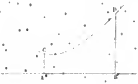
unde erit ABDC $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^2 + \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{13}{3}x^3$, etc.

Exempla Radicem Extrahendo.

Si sit $\sqrt{aa + xx} = y$, Radicem sic extraho, N° V.

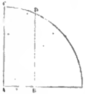
$$aa + xx \left(a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}, \text{etc.} \right.$$

$$\begin{array}{l} aa \\ \hline 0 + xx \\ xx + \frac{x^4}{4a^2} \\ \hline 0 - \frac{x^4}{4a^2} \\ -\frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6} \\ \hline 0 + \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \\ +\frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\ \hline 0 - \frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\ \text{etc.} \end{array}$$



Unde, pro Æquatione $\sqrt{aa + xx} = y$, nova producitur, viz.

$$y = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}, \text{ etc.}$$



Et (per Reg. 2) Area quæsita ABDC erit

$$= ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}, \text{ etc.}$$

Et hæc est Quadratura Hyperbolæ.

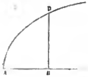
Eodem modo, si sit $\sqrt{aa - xx} = y$, ejus Radix erit

$$a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}, \text{ etc.},$$

Adeoque Area quæsita ABDC erit æqualis $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ etc. Et hæc est Quadratura Circuli.

8.

Vel si ponas $\sqrt{x-xx}=y$; erit Radix æqualis infinitæ seriei



$$x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}-\frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}, \text{ etc.}$$

Et area quæsita ABD æqualis erit

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}-\frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}, \text{ etc.}$$

sive $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{28}x^3-\frac{1}{72}x^4-\frac{5}{704}x^5$, etc.
Et hæc est Area Circuli quadratura.

Si $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}=y$ (Cujus Quadratura dat Longitudinem curvæ Ellipticæ);
Extrahendo radicem utramque prodit

$$\frac{1+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{8}a^2x^4+\frac{1}{16}a^3x^6-\frac{5}{128}a^4x^8, \text{ etc.}}{1-\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{8}b^2x^4-\frac{1}{16}b^3x^6-\frac{5}{128}b^4x^8, \text{ etc.}}$$

Et Dividendo, sicut fit in Fractionibus Decimalibus, habes

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}bx^2+\frac{3}{8}b^2x^4+\frac{5}{16}b^3x^6+\frac{35}{128}b^4x^8, \text{ etc.}\\
&+\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{4}abx^4+\frac{3}{16}ab^2x^6+\frac{5}{32}ab^3x^8, \text{ etc.}\\
&-\frac{1}{8}a^2x^4-\frac{1}{16}a^2bx^6-\frac{3}{64}a^2b^2x^8, \text{ etc.}\\
&+\frac{1}{16}a^3x^6+\frac{1}{32}a^3bx^8, \text{ etc.}\\
&-\frac{5}{128}a^4x^8, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Adeoque Aream quæsitam $x+\frac{1}{6}bx^3+\frac{3}{40}b^2x^5$, etc.

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{6}ax^3+\frac{1}{20}abx^5, \text{ etc.}\\
&-\frac{1}{40}a^2x^5, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Sed observandum est, quod Operatio non raro abbreviatur per debitam Æquationis præparationem, ut in allato Exemplo $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}=y$.

Si utramque partem fractionis per $\sqrt{1-bxx}$ multiplices prodibit

$$\frac{\sqrt{1+ax^2-abx^4-bx^2}}{1-bx^2}=y,$$

et reliquum opus perficitur extrahendo Radicem Numeratoris tantum, et dividendo per Denominatorem.

Ex hisce, credo, satis patebit modus reducendi quemlibet valorem ipsius y (quibuscunque Radicibus vel Denominatoribus sit perplexus, ut hic videre est; $x^3 + \frac{\sqrt{x - \sqrt{1 - xx}}}{\sqrt[3]{ax^3 + x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^3 + 2x^5 - x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x + x^2} - \sqrt[2]{2x - x^{\frac{2}{3}}}} = y$) in series Infinitas simplicium Terminorum, ex quibus, per Regulam Secundam, quæsita Superficies cognoscetur.

Exempla per Resolutionem Æquationum.

Numeralis Æquationum affectarum Resolutio.

Quia tota difficultas in Resolutione latet, modum quo ego utor in Æquatione Numerali primum illustrabo. N° 11.

Sit $y^3 - 2y - 5 = 0$, resolvenda: Et sit 2, numerus qui minus quam decima sui parte differt a Radice quæsita. Tum pono $2 + p = y$, et substituo hunc ipsi valorem in Æquationem, et inde nova prodit $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, cujus Radix p exquirenda est, ut quotienti addatur: Nempe (neglectis $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10p - 1 = 0$, sive $p = 0{,}1$ prope veritatem est; itaque scribo 0,1 in quotiente, et suppono $0{,}1 + q = p$, et hunc ejus valorem, ut prius substituo, unde prodit $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+ 2{,}10000000$ $- 0{,}00544853$ $+ 2{,}09455147 = y$
$2 + p = y$	$+ y^3$ $- 2y$ $- 5$	$+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $- 4 - 2p$ $- 5$
	Summa	$- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$	$+ p^3$ $+ 6p^2$ $+ 10p$ $- 1$	$+ 0{,}001 + 0{,}03\,q + 0{,}3\,q^2 + q^3$ $+ 0{,}06 + 1{,}2 + 6{,}0$ $+ 1, + 10,$ $- 1,$
	Summa	$+ 0{,}061 + 11{,}23\,q + 6{,}3\,q^2 + q^3$
$- 0{,}0054 + r = q$	$+ 6{,}3q^2$ $+ 11{,}23q$ $+ 0{,}061$	$+ 0{,}000183708 - 0{,}06804\,r + 6{,}3\,r^2$ $- 0{,}060642 + 11{,}23$ $+ 0{,}061$
	Summa	$+ 0{,}000541708 + 11{,}16196\,r + 6{,}3\,r^2$.
$- 0{,}00004854 + s = r$		

Et cum $11,23q + 0,061$ veritati prope accedit, sive fere sit q æqualis $-0,0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur Figuræ, quot locis primæ Figuræ hujus et principalis quotientis exclusive distant) scribo $-0,0054$ in inferiori parte quotientis, cum negativa sit.

Et supponens $-0,0054 + r = q$, hunc ut prius substituo; et operationem sic produco quo usque placuerit. Verum si ad bis tot figuras tantum quot in quotiente jam reperiuntur una dempta, operam continuare cupiam, pro q substituo $-0,0054 + r$ in hanc $6,3q^2 + 11,23q + 0,061$, scilicet primo ejus termino (q^2) propter exilitatem suam neglecto, et prodit $6,3r^2 + 11,16196r + 0,000541708 = 0$, fere, sive (rejecto $6,3r^2$) $r = \frac{-0,000541708}{11,16196} = -0,00004853$ fere, quam scribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativa subducens habeo $2,09455147$ Quotientem quæsitam.

Æquationes plurium dimensionum nihilo secius resolvuntur, et operam sub fine, ut hic factum fuit, levabis, si primos ejus terminos gradatim omiseris.

Præterea notandum est quod in hoc exemplo, si dubitarem an $0,1 = p$ veritati satis accederet, pro $10p - 1 = 0$, finxissem $6p^2 + 10p - 1 = 0$, et ejus radicis primam figuram in Quotiente scripsissem; et secundam vel tertiam Quotientis figuram sic explorare convenit, ubi in Æquatione ista ultimo resultante quadratum coefficientis penultimi termini, non sit decies majus quam factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi.

Imo laborem plerumque minues, præsertim in Æquationibus plurimarum dimensionum, si figuras omnes Quotienti addendas dicto modo (hoc est extrahendo minorem radicum, ex tribus ultimis terminis Æquationis novissime resultantis) exquiras: Isto enim modo figuras duplo plures qualibet vice Quotienti lucraberis.

Hæc Methodus resolvendi Æquationes pervulgata an sit nescio, certe mihi videtur præ reliquis simplex, et usui accommodata. Demonstratio ejus ex ipso modo operandi patet, unde cum opus sit, in memoriam facile revocatur.

Æquationes in quibus vel aliqui vel nulli Termini desint, eadem fere facilitate tractantur; et Æquatio semper relinquitur, cujus Radix una cum acquisita Quotiente adæquat Radicem Æquationis primo propositæ. Unde Examinatio Operis hic æque poterit institui ac in reliqua Arithmetica, auferendo nempe Quotientem a Radice primæ Æquationis (sicut Analystis notum est) ut Æquatio ultima vel Termini ejus duo tresve ultimi producantur

inde. Quicquid laboris hic est, istud in Operatione substituendi quantitates unas pro aliis reperietur : Id quod varie perficias, at sequentem modum maxime expeditum puto, præsertim ubi Numeri Coefficientes constant ex pluribus Figuris.

Sit $p+3$ substituenda pro y in hanc $y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12y + 17 = 0$. Et cum ista possit resolvi in hanc formam. *

$\overline{\overline{\overline{y-4}\times y+5}\times y-12}\times y+17=0$. Æquatio nova sic generabitur $p-1$ in $p+3 = p^2+2p-3$. et p^2+2p+2 in $p+3 = p^3+5p^2+8p+6$. et p^3+5p^2+8p-6 in $p+3 = p^4+8p^3+23p^2+18p-18$. et $p^4+8p^3+23p^2+18p-1=0$, quæ quærebatur.

Literalis Æquationum affectarum Resolutio.

His in numeris sic ostensis : Sit Æquatio literalis $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$, resolvenda. N° VII.

Primum inquiro valorem ipsius y cum x sit nulla, hoc est, elicio Radicem hujus Æquationis $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, et invenio esse $+a$. Itaque scribo $+a$ in Quotiente, et supponens $+a+p=y$, substituo pro y valorem ejus, et Terminos inde resultantes ($p^3 + 3ap^2 + 4a^2p$, etc.) margini appono; Ex quibus assumo $+4a^2p + a^2x$ terminos utique ubi p et x seorsim sunt minimarum dimensionum, et eos nihilo fere æquales esse suppono, sive $p = -\frac{1}{4}x$ fere, vel $p = -\frac{1}{4}x + q$. Et scribens $-\frac{1}{4}x$ in Quotiente, substituo $-\frac{1}{4}x + q$ pro p; Et terminos inde resultantes iterum in margine scribo, ut vides in annexo schemate, et inde assumo Quantitates $+4a^2q - \frac{1}{16}ax^2$, in quibus utique q et x seorsim sunt minimarum dimensionum, et fingo $q = \frac{xx}{64a}$ fere, sive $q = +\frac{xx}{64a} + r$; et adnectens $+\frac{xx}{64a}$ Quotienti, substituo $\frac{xx}{64a} + r$ pro q; et sic procedo quousque placuerit.

---

* Id est :

$$\{[(y-4)y+5]y-12\}y+17=0 \qquad \text{(F. L.)}$$

$$y^3 + a^2 y - 2a^3 + axy - x^3 = 0.$$

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}, \text{ etc.}$$

$+a+p=y$	$+y^3$ $+a^2y$ $+axy$ $-2a^3$ $-x^3$	$+a^3+3a^2p+3ap^2+p^3$ $+a^3+a^2p$ $+a^2x+axp$ $-2a^3$ $-x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$ $+3ap^2$ $+4a^2p$ $+axp$ $+a^2x$ $-x^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}x^2q-\frac{3}{4}xq^2+q^3$ $+\frac{3}{16}ax^2-\frac{3}{2}axq+3aq^2$ $-a^2x+4a^2q$ $-\frac{1}{4}ax^2+axq$ $+a^2x$ $-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	$+3aq^2$ $+4a^2q$ $-\frac{1}{2}axq$ $+\frac{3}{16}x^2q$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$	$+\frac{3x^4}{4096a}+\frac{3}{32}x^2r+3ar^2$ $+\frac{1}{16}ax^2+4a^2r$ $-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$ $+\frac{3x^4}{1024a}+\frac{3}{16}x^2r$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$

$$+4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2\Big) + \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}\Big(+ \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$$

Sin duplo tantum plures Quotienti terminos, uno dempto, jungendos adhuc vellem : Primo termino (q^3) Æquationis novissime resultantis misso, et ista etiam parte $\left(-\frac{3}{4}xq^2\right)$ secundi, ubi x est tot dimensionum quot in penultimo termino Quotientis; In reliquos terminos ($3aq^2 + 4a^2q$ etc.), margini adscriptos ut vides, substituo $\frac{x^2}{64a} + r$ pro q; et ex ultimis duobus terminis $\left(\frac{15x^4}{4096a} - \frac{131}{128}x^3 + \frac{9}{32}x^2r - \frac{1}{2}axr + 4a^2r\right)$ Æquationis inde resultantis, facta divisione $4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2\Big) + \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}\Big($ elicio $+\frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ Quotienti adnectendos.

Denique Quotiens ista $\left(a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a}, \text{etc.}\right)$ per Regulam secundam dabit $ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a^2} + \frac{509x^5}{81920a^3}$, etc. pro Area quæsita, quæ ad veritatem tanto magis accedit, quanto x sit minor.

Alius modus easdem Resolvendi.

Sin valor Areæ tanto magis ad veritatem accedere debet quanto x sit major; Exemplum esto $y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$. Itaque hanc resoluturus excerpo terminos $y^3 + x^2y - 2x^3$ in quibus x et y vel seorsim, vel simul multiplicatæ, sunt et plurimarum, et æqualium ubique dimensionum; et ex iis quasi nihilo æqualibus Radicem elicio. Hanc invenio esse x, et in Quotiente scribo. Vel quod eodem recidit, ex $y^3 + y - 2$ (unitate pro x substituta) Radicem extraho quæ hic prodit 1, et eam per x multiplico, et factum (x) in Quotiente scribo. Denique pono $x + p = y$, et sic procedo ut in priori Exemplo, donec habeam Quotientem $x + \frac{a}{4} + \frac{aa}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3}$, etc. adeoque * Aream $\frac{x^2}{2} + \frac{ax}{4} + \boxed{\frac{aa}{64x}} - \frac{131a^3}{512x} - \frac{509a^4}{32768x}$, de qua vide exempla tertia Regulæ secundæ. Lucis gratia dedi hoc exemplum in omnibus idem cum priori, modo x et a sibi invicem ibi substituantur, ut non opus esset aliud Resolutionis exemplum hic adjungere. N° VIII.

Area autem $\left(\frac{xx}{2} - \frac{ax}{4} + \boxed{\frac{aa}{64x}} \text{ etc.}\right)$ terminatur ad Curvam quæ juxta Asymptoton aliquam in infinitum serpit; et Termini initiales $(x - \frac{1}{4}a)$ valoris extracti de y, in Asymptoton istam semper terminantur; unde portionem Asymptoti facile invenies. Idem semper notandum est cum Area designatur terminis plus plusque divisis per x continue, præterquam quod vice Asymptoti rectæ quandoque habeatur Parabola Conica, vel alia magis composita.

Sed hunc modum missum faciens, utpote particularem, quia non applicabilem Curvis in orbem ad instar Ellipsium flexis; de altero modo per exemplum $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, supra ostenso (scilicet quo dimensiones ipsius x in numeratoribus quotientis perpetuo augeantur) annotabo sequentia. N° IX.

[* N. B. eodem sensu quo *Newtonus* utitur symbolo $\boxed{\frac{aa}{64x}}$ *Leibnitius* utitur Symbolo, $S\,\frac{aa}{64x}$.] Addition.

1. Si quando accidit quod valor ipsius y, cum x nullum esse fingitur, sit quantitas surda vel penitus ignota, licebit illam litera aliqua designare. Ut in exemplo, $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, si radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3$ fuisset surda vel ignota, finxissem quamlibet (b) pro ea ponendam; et resolutionem ut sequitur perfecissem. Scribens b in Quotiente, suppono $b + p = y$, et istum y substituo, ut vides; unde nova $p^3 + 3bp^2$, etc. resultat, rejectis terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$, qui nihilo sunt æquales, propterea quod b supponitur Radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$. Deinde termini $3b^2p + a^2p + abx$ dant $-\frac{abx}{3b^2 + a^2}$ quotienti apponendum, et $-\frac{abx}{3b^2 + a^2} + q$ substituendum pro p, etc.

$$y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0. \quad \text{Sit} \quad cc = 3b^2 + a^2$$

$$y = b - \frac{abx}{c^2} + \frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^2}{c^2} + \frac{a^3b^3x^2}{c^8} - \frac{a^2bx^2}{c^6} + \frac{a^6b^3x^3}{c^{10}}, \text{ etc.}$$

$b + p = y$	$+ y^3$	$+ b^3 + 3b^2p + 3bp^2 + p^3$
	$+ axy$	$+ abx + axp$
	$+ aay$	$+ aab + aap$
	$- x^3$	$- x^3$
	$- 2a^3$	$- 2a^3$
$-\frac{abx}{cc} + q = p$	p^3	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}$, etc.
	$+ 3bp^2$	$+\frac{3a^2b^3x^2}{c^4} - \frac{6ab^2x}{c^2}q$, etc.
	$+ axp$	$-\frac{a^2bx^2}{c^2} + axq$
	$+ ccp$	$- abx + ccq$
	$- x^3$	$- x^3$
	$+ abx$	$+ abx$

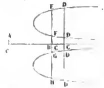
$$c^2 + ax - \frac{6ab^2x}{c^2} \Big) \frac{a^4bx^2}{c^4} + x^3 + \frac{a^3b^3x^3}{c^6} \Big(\frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^2}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8}, \text{ etc.}$$

Completo opere, sumo numerum aliquem pro a, et hanc $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, sicut de numerali æquatione ostensum supra resolvo; et radicem ejus pro b substituo.

2. Si dictus valor sit nihil, hoc est si in æquatione resolvenda nullus sit terminus nisi qui per x vel y sit multiplicatus, ut in hac $y^3 - axy + x^3 = 0$; tum terminos $(-axy + x^3)$ seligo in quibus x seorsim et y etiam seorsim si fieri potest, alias per x multiplicata, sit minimarum dimensionum. Et illi

dant $+\frac{xx}{a}$ pro primo termino quotientis, et $\frac{xx}{a}+p$ pro y substituendum. In hac $y^3-a^2y+axy-x^3=0$, licebit primum terminum quotientis vel ex $-a^2y-x^3$, vel ex y^3-a^2y elicere.

3. Si valor iste sit imaginarius, ut in hac $y^4+y^2-2y+6-x^2y^2-2x+x^2+x^4=0$, augeo vel imminuo quantitatem x donec dictus valor evadat realis.



Sic in annexo schemate, cum AC (x) nulla est, tum CD (y) est imaginaria.

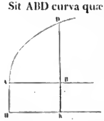
Sin minuatur AC per datam AB, ut BC fiat x; tum posito quod BC (x) sit nulla, CD (y) erit valore quadruplici (CE, CF, CG, vel CH) realis; quarum radicum (CE, CF, CG, vel CH) quælibet potest esse primus terminus quotientis, prout superficies BEDC, BFDC, BGDC, vel BHDC desideratur. In aliis etiam casibus, si quando hæsitas, te hoc modo extricabis.

Denique si index potestatis ipsius x vel y sit fractio, reduco ipsum ad integrum : ut in hoc exemplo $y^3-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{3}}=0$. Posito $y^{\frac{1}{2}}=v$, et $x^{\frac{4}{3}}=z$, resultabit $v^6-z^3v+z^4=0$, cujus radix est $v=z+z^3$, etc. sive (restituendo valores) $y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{3}}+x$, etc. et quadrando $y=x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{4}{3}}$, etc.

Et hæc de areis curvarum investigandis dicta sufficiant. Imo cum Problemata omnia de curvarum Longitudine, de quantitate et superficie solidorum, deque Centro Gravitatis, possunt eo tandem reduci ut quæratur quantitas Superficiei planæ linea curva terminatæ, non opus est quicquam de iis adjungere. In istis autem quo ego operor modo dicam brevissime. N° X.

Applicatio prædictorum ad reliqua istiusmodi Problemata.

Sit ABD curva quævis, et AHKB rectangulum cujus latus AH vel BK est unitas. Et cogita * rectam DBK uniformiter ab AH motam, areas ABD et AK describere; et quod BK (1) sit momentum quo AK (x) et BD (y) momentum quo ABD gradatim augetur; et quod ex momento BD perpetim dato, possis, per prædictas regulas, aream ABD ipso descriptam investigare, sive cum (1) AK (x) momento 1 descripta conferre.



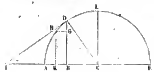
* N. B. Hic describitur Methodus per Fluentes et earum Momenta. Hæc Momenta a D. *Leibnitio* Differentiæ postmodum vocata sunt : Et inde nomen *Methodi Differentialis.*

(1) [Area.] Interpolation.

Jam qua ratione Superficies ABD ex momento suo perpetim dato, per præcedentes regulas elicitur, eadem quælibet alia quantitas ex momento suo sic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior.

Longitudines Curvarum invenire.

Sit ADLE circulus cujus arcus AD longitudo est indaganda. Ducto tangente DHT, et completo indefinite parvo rectangulo HGBK, et posito AE $= 1 = 2$ AC. † Erit ut BK sive GH, momentum Basis AB (x), ad HD momentum Arcus AD :: BT : DT :: BD ($\sqrt{x - xx}$) : DC($\frac{1}{2}$) :: 1 (BK) : $\frac{1}{2\sqrt{x - xx}}$ (DH). Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{x - xx}}$ sive $\frac{\sqrt{x - xx}}{2x - 2xx}$ est momentum Arcus AD. Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}} + \frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}$, etc.



Quare, per regulam secundam, longitudo Arcus AD est $x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}} + \frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}$ etc. sive $x^{\frac{1}{2}}$ in $1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4 + \frac{63}{2816}x^5$, etc.

Non secus ponendo CB esse x, et radium CA esse 1, invenies Arcum LD esse $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, etc.

Sed notandum est quod unitas ista, quæ pro momento ponitur, est superficies cum de solidis, et linea cum de superficiebus, et punctum cum de lineis (ut in hoc exemplo) agitur.

Nec vereor loqui de unitate in punctis, sive lineis infinite parvis, si quidem proportiones ibi jam contemplantur Geometræ, dum utuntur methodis Indivisibilium.

Ex his fiat conjectura de superficiebus et quantitatibus solidorum, ac de Centris Gravitatum.

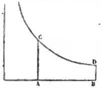
Invenire prædictorum conversum.

Verum si e contra ex area vel longitudine etc. Curvæ alicujus data, longitudo Basis AB desideratur, ex æquationibus per præcedentes regulas inventis extrahatur radix de x.

† Exemplum calculi per Momenta fluentium.

Inventio Basis ex Area data.

Ut si ex area ABDC Hyperbolæ $\left(\frac{1}{1+x} = y\right)$ data, cupiam basim AB investigare, area ista z nominata, extraho radicem hujus $z\,(\text{ABCD}) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ etc. neglectis illis terminis in quibus x est plurium dimensionum quam z in quotiente desideratur.



Ut si vellem quod z ad quinque tantum dimensiones in quotiente ascendat, negligo omnes $-\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8$, etc. et radicem hujus tantum $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - z = 0$ extraho.

$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, etc.		
$z + p = x$	$+\frac{1}{5}x^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, etc.
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4 - z^3p$, etc.
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2$, etc.
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$
	$+x$	$+z+p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}z^2 + q = p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5$, etc.
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{3}z^4 - \frac{1}{4}z^2q$, etc.
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$, etc.
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$-zp$	$-\frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}z^2 + q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$
$1 - z + \frac{1}{2}z^2\Big)\ \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5\ \Big(\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$		

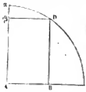
Analysin ut vides exhibui propter adnotanda duo sequentia.

1. Quod inter substituendum, istos terminos semper omitto quos nulli deinceps usui fore prævideam. Cujus rei regula esto, quod post primum terminum ex qualibet quantitate sibi collaterali resultantem non addo plures terminos dextrorsum quam istius primi termini index dimensionis ab indice dimensionis maximæ unitatibus distat. Ut in hoc exemplo, ubi maxima dimensio est 5, omisi omnes terminos post z^5, post z^4 posui unicum, et duos tantum post z^3. Cum radix extrahenda (x) sit parium ubique, vel imparium dimensionum, hæc esto regula; quod post primum terminum ex qualibet quantitate sibi collaterali resultantem non addo plures terminos dextrorsum, quam istius primi termini index dimensionis ab indice dimensionis maximæ binis unitatibus distat; vel ternis unitatibus, si indices dimensionum ipsius x unitatibus ubique ternis a se invicem distant, et sic de reliquis.

2. Cum video p, q, vel r, etc. in æquatione novissime resultante esse unius tantum dimensionis, ejus valorem, hoc est, reliquos terminos quotienti addendos, per divisionem quæro. Ut hic vides factum.

Inventio Basis ex data Longitudine Curvæ.

Si ex dato arcu αD Sinus AB desideratur; æquationis $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, etc. supra inventæ, (posito nempe AB $= x$, αD $= z$, et A$\alpha = 1$), radix extracta erit $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, etc.



Et prætera si Cosinum Aβ ex isto arcu dato cupis, fac Aβ $(= \sqrt{1 - xx}) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$, etc.

De Serie progressionum continuanda.

Hic obiter notetur, quod 5 vel 6 terminis istarum radicum cognitis, eas plerumque ex analogia observata poteris ad arbitrium producere.

Sic hanc $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, etc., produces, dividendo ultimum terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc.

Et hanc $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7$, etc., per hos 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, 10×11, etc.

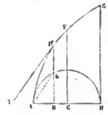
Et hanc $x = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6$, etc., per hos 1×2, 3×4, 5×6, 7×8, 9×10, etc.

Et hanc $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, etc. multiplicando per hos, $\frac{1\times1}{2\times3}$, $\frac{3\times3}{4\times5}$, $\frac{5\times5}{6\times7}$, $\frac{7\times7}{8\times9}$, etc. Et sic in reliquis.

Applicatio prædictorum ad Curvas Mechanicas.

Et hæc de Curvis Geometricis dicta sufficiant. Quinetiam Curva etiamsi Mechanica sit, methodum tamen nostram nequaquam respuit.

Exemplo sit Trochoides, ADFG, cujus vertex A, et axis AH, et AKH rota N° XI

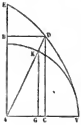


qua describitur. Et quæratur Superficies ABD. Jam posito $AB = x$, $BD = y$, ut supra, et $AH = 1$; primo quæro Longitudinem ipsius BD. Nempe ex natura Trochoidis est KD = arcui AK. Quare tota BD = BK + arc. AK. Sed est BK $(=\sqrt{x-xx}) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$ etc. et (ex prædictis) arcus AK $= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}$, etc. Ergo tota BD $= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}$, etc. Et (per Reg. 2.) area ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}$, etc.

Vel brevius sic : Cum recta AK tangenti TD parallela sit, erit AB ad BK sicut momentum lineæ AB ad momentum lineæ BD, hoc est $x : \sqrt{x-xx} :: 1 : \frac{1}{x}\sqrt{x-xx} = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}}$, etc. Quare (per Reg. 2). BD $= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{576}x^{\frac{9}{2}}$, etc. Et superficies ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{3168}x^{\frac{11}{2}}$, etc.

Non dissimili modo (posito C centro circuli, et $CB = x$) obtinebis aream CBDF, etc.

Sit area ABDV Quadratricis VDE (cujus vertex est V, et A centrum circuli interioris VK cui aptatur) invenienda. Ducta qualibet AKD, demitto perpendiculares DB, DC, KG. Eritque KG : AG : : AB (x) : BD (y), sive $\frac{x \times AG}{KG} = y$. Verum ex natura Quadratricis est BA ($=$ DC) $=$ arcui VK, sive VK $= x$. Quare posito AV $= 1$, erit GK $= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, etc., ex supra ostensis, et GA $= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$, etc.



Adeoque $y \left(= \frac{x \times AG}{KG}\right) = \dfrac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6, \text{ etc.}}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6, \text{ etc.}}$

sive, divisione facta, $y = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{245}x^6$, etc. et (per Reg. 2.) area AVDB $= x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{2}{6615}x^7$, etc.

Sic longitudo Quadratricis VD, licet calculo difficiliori, determinabilis est.

Nec quicquam hujusmodi scio ad quod hæc methodus, idque variis modis, sese non extendit. Imo tangentes ad Curvas Mechanicas (si quando id non alias fiat) hujus ope ducantur. Et quicquid vulgaris Analysis per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quando id sit possibile) perficit, hæc per æquationes infinitas semper perficiat : Ut nil dubitaverim nomen Analysis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hac non minus certa sunt quam in illa, nec æquationes minus exactæ; licet omnes earum terminos, nos homines et rationis finitæ nec designare neque ita concipere possimus, ut quantitates inde desideratas exacte cognoscamus : Sicut radices surdæ finitarum æquationum nec numeris nec quavis arte Analytica ita possunt exhiberi, ut alicujus quantitas a reliquis distincta exacte cognoscatur.

Denique ad Analyticam merito pertinere censeatur, cujus beneficio Curvarum areæ et longitudines etc. (id modo fiat) * exacte et Geometrice de-

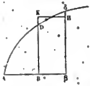
* N. B. Quadratura Curvarum per Æquationes infinitas, quæ nonnunquam terminantur et finitæ evadunt (1).

(1) [Eadem explicatur in Prop. V. Libri de Quadraturis. Et propositio illa pendet a quatuor prioribus. Ideoque methodus fluxionum et momentorum, quatenus habetur in Propositionibus quinque primis Libri de Quadraturis *Newtono* innotuit Anno 1669.] Addition.

terminentur. Sed ista narrandi non est locus. Respicienti duo præ reliquis demonstranda occurrunt.

I. *Demonstratio quadraturæ curvarum simplicium in Regula prima.*

Præparatio pro Regula prima demonstranda.



† Sit itaque curvæ alicujus $AD\delta$ Basis $AB = x$, perpendiculariter applicata $BD = y$, et area $ABD = z$, ut prius. Item sit $B\beta = o$, $BK = v$, et rectangulum $B\beta HK$ (ov) æquale spatio $B\beta\delta D$.

Est ergo $A\beta = x + o$, et $A\delta\beta = z + ov$. His præmissis, ex relatione inter x et z ad arbitrium assumpta quæro y isto, quem sequentem vides, modo.

Pro lubitu sumatur $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, sive $\frac{4}{9}x^3 = zz$. * Tum $x + o$ $(A\beta)$, pro x, et $z + ov$ $(A\delta\beta)$ pro z substitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3 =$ (ex natura Curvæ) $z^2 + 2zov + o^2v^2$. Et sublatis $\left(\frac{4}{9}x^3 \text{ et } zz\right)$ æqualibus, reliquisque per o divisis, restat $\frac{4}{9}$ in $3x^2 + 3xo + o^2 = 2zv + ov^2$. Si jam supponamus $B\beta$ in infinitum diminui et evanescere, sive o esse nihil, erunt v et y æquales, et termini per o multiplicati evanescent, quare restabit $\frac{4}{9} \times 3xx = 2zv$, sive $\frac{2}{3}xx\,(= zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, sive $x^{\frac{1}{2}}\left(= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = y$. Quare e contra si $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

Demonstratio.

Vel generaliter, si $\frac{n}{m+n} \times ax^{\frac{m+n}{n}} = z$; sive, ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, et $m + n = p$, si $cx^{\frac{p}{n}} = z$, sive $c^n x^p = z^n$: * tum $x + o$ pro x, et $z + ov$ (sive, quod perinde est, $z + oy$) pro z, substitutis, prodit c^n in $x^p + pox^{p-1}$, etc. $= z^n + noyz^{n-1}$; etc. reliquis nempe terminis, qui tandem evanescerent, omissis. Jam sublatis $c^n x^p$ et z^n æqualibus, reliquisque per o divisis, restat $c^n px^{p-1} = nyz^{n-1}$ $\left(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}}\right)$ sive dividendo per $c^n x^p$, erit

† Exemplum luculentum Calculi per momenta Fluentium.

* [*Leibnitius* scribit dx pro o vel $ox1$, dz pro ov vel oy.] Addition.

$px^{\frac{p}{n}-1} = \frac{ny}{c}$, sive $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; vel restituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c, et $m+n$ pro p, hoc est, m pro $p-n$, et na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare e contra, si $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D.

Inventio Curvarum quæ possunt quadrari.

Hinc in transitu notetur modus quo curvæ tot quot placuerit, quarum areæ sunt cognitæ, * possunt inveniri; sumendo nempe quamlibet æquationem pro relatione inter aream z et basin x, ut inde quæratur applicata y. Ut si supponas $\sqrt{aa+xx} = z$, ex calculo invenies $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}} = y$. Et sic de reliquis.

2. *Demonstratio resolutionis æquationum affectarum.*

Alterum demonstrandum est literalis æquationum affectarum resolutio. Nempe quod Quotiens, cum x sit satis parva, quo magis producitur eo magis ad veritatem accedit, ut defectus (p, q, vel r, etc.) quo distat ab exacto valore ipsius y, tandem evadat minor quavis data quantitate; et in infinitum producta sit ipsi y æqualis. Quod sic patebit.

1. Quoniam ex ultimo termino æquationum quarum p, q, r, etc. sunt radices, quantitas illa in qua x est minimæ dimensionis (hoc est, plusquam dimidium istius ultimi termini, si supponis x satis parvam esse) in qualibet operatione perpetuo tollitur : iste ultimus terminus (per 1. 10. *Elem.*) tandem evadet minor quavis data quantitate; et prorsus evanescet si opus infinite continuatur.

Nempe si $x = \frac{1}{2}$, erit x dimidium omnium $x + x^2 + x^3 + x^4$, etc. Et x^2



dimidium omnium $x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, etc. Itaque si $x > \frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x + x^2 + x^3$, etc. Et x^2 plusquam dimidium omnium $x^2 + x^3 + x^4$, etc. Sic si $\frac{x}{b} > \frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{bb}$, etc. Et sic de reliquis. Et numeros

---

*. Hac propositione ex æquatione Fluentes involvente inveniuntur Fluxiones.

coefficientes quod attinet, illi plerumque decrescunt perpetuo, vel si quando increscant, tantum opus est ut x aliquoties adhuc minor supponatur.

2. Si ultimus terminus alicujus æquationis continuo diminuatur donec tandem evanescat, una ex ejus radicibus etiam diminuetur donec cum ultimo termino simul evanescat.

3. Quare quantitatum p, q, r, etc. unus valor continuo decrescit donec tandem, cum opus in infinitum producitur, penitus evanescat.

4. Sed valores istarum p, q, vel r, etc. una cum quotiente eatenus extracta adæquant radices æquationis propositæ. (Sic in resolutione æquationis $y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$ supra ostensa, percipies $y = a + p = a - \frac{1}{4}x + q = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + r$, etc.). Unde satis liquet propositum quod quotiens infinite producta est una ex valoribus de y.

Idem patebit substituendo quotientem pro y in æquatione proposita. Videbis enim terminos illos sese perpetuo destruere in quibus x est minimarum dimensionum.

Excerpta ex Epistola D. Oldenburgh *ad D.* Renatum Franciscum Slusium *Canonicum* Leodiensem, *Anno* 1669, 14 Septembris St. vet. *dati: cujus Apographum conspicitur in Libro* Societatis Regiæ, *quo conservantur Epistolæ*, N° 3. *p.* 174. N° XIII

Insuper communicavit ille [*Barrovius*] universalem Methodum Analyticam, ipsi transmissam a D. *Isaaco Newtono*, inservientem mensurandis Areis omnium ejusmodi Curvarum, et earundem Perimetrorum, in quibus Ordinatæ eandem habent communem habitudinem ad Basin : Hæcque methodus alia non est ab illa, quam particulariter applicuit D. *Mercator* ad inveniendas areas Hyperbolæ, universalis reddita. Auctor sic incipit.

« *De Analysi per Æquationes numero terminorum infinitas.*

« Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam « terminorum seriem mensuranda, olim excogitaveram, etc. »

Et postquam ejus beneficio ostendit complurium Curvarum Quadraturam, accedit ad Circulum; et convertendo $\sqrt{aa + bb}$, vel $\sqrt{aa - bb}$ in Seriem infinitam, ostendit complures ejusmodi Series applicari posse ad Circulum, adeo ut datis horum quibuslibet duobus; Radio nempe, Sinu, Arcu, et Area Segmenti, reliquorum quodvis inveniri possit infinite verum :

10.

(res ni fallor ab omnibus Auctoribus prægressis valde expetita). Ejusdem etiam adminiculo eximie facilitavit inventionem Radicis Æquationis cujuslibet, et mediarum Proportionalium; et Seriem largitur ad inveniendam lineæ Ellipticæ longitudinem. Similiter, ut ostenderet methodum suam ad Curvas mechanicas earumque Tangentes se porrigere, quadrat Cycloïdem ejusque portiones; Areamque curvæ Quadratricis, ejusque Perimetrum invenit: Atque ad calcem sic ait.

« Nec quicquam hujusmodi scio ad quod hæc Methodus, idque variis « modis, sese non extendat. Imo Tangentes ad Curvas mechanicas (si « quando id non alias fiat) hujus ope ducuntur. Et quicquid vulgaris « Analysis per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quan« do id sit possibile) perficit, hæc per Æquationes infinitas semper « perficiat.

» Et hæc de Areis Curvarum investigandis dicta sufficiant. Imo cum « Problemata de Curvarum Longitudine, de quantitate et Superficie Soli« dorum, deque Centro Gravitatis, possunt eo tandem reduci ut quæratur « quantitas Superficiei planæ linea curva terminatæ, non opus est quic« quam de iis adjungere. »

N° XIV. *Ex Epistola D.* Collins *ad D.* Jacobum Gregorium *Anno* 1669, 25 Novemb. *datâ. Quæ quidem Epistola, manu dicti D.* Collins *descripta, conservata est.*

Barrovius provinciam suam publice prælegendi remisit cuidam nomine *Newtono* Cantabrigiensi, cujus, tanquam viri acutissimo ingenio præditi, in Præfatione Prælectionum Opticarum, meminit: quique antequam ederetur *Mercatoris* Logarithmotechnia, eandem Methodum adinvenerat, eamque ad omnes Curvas generaliter, et ad Circulum diversimode, applicârat.

N° XV. *Ex Epistola D.* Jacobi Gregorii *ad D.* J. Collins, *ad Fanum St.* Andreæ *apud* Scotos *Anno* 1670, 20 Aprilis *datâ, prout in Autographo ipsius* Gregorii *legitur.*

Seriem a te missam de Circuli Zona intelligere nequeo, nempe

$$2\,R\dot{B} - \frac{B^3}{3\,R} - \frac{B^5}{20\,R^3} - \frac{B^7}{56\,R^5} - \frac{5\,B^9}{576\,R^7} - \text{etc.}$$

Si hæc recte descripta sit, Seriem legitimam non esse suspicor.

Ex Epistola ejusdem Gregorii *ad eundem, Anno* 1670, 5 Septemb. *data.* N°. XVI.

Barrovii [Geometricas] Lectiones summa cum voluptate et attentione perlegi; atque omnes qui unquam hisce de rebus scripserunt infinito intervallo superasse comperio. Ex ejusdem [*Barrovii*] methodis Tangentes ducendi cum quibusdam e propriis collatis, inveni Methodum generalem et Geometricam * ducendi Tangentes ad omnes Curvas sine calculo; et quæ complectitur non tantum *Barrovii* Methodos particulares, sed et ipsius generalem Methodum Analyticam, quam habes sub finem Lectionis decimæ. Methodus mea haud pluribus quam duodecim continetur Propositionibus.

Ex Epistola ejusdem ad eundem Anno 1670, 23 Novemb. *data, cujus etiam conservatur Autographon.* N°. XVII.

Plurimæ approximationes pro Circuli Segmentis ex his facile elici possunt; at vix operæ pretium erit, cum potestates alternas tollere nequeo, quod factum est a D. *Newtono* in sua Serie, modo Series sit: (nam ut dicam quod sentio, ad nullam mearum reducere possum). Autumo tamen meam pari facilitate et brevitate rem confecturam.

Ex Autographo D. Jacobi Gregorii *ad eundem D.* Collins, *de Fano St.* Andreæ, 19 Decembris *ejusdem Anni, misso.* N°. XVIII.

Quum postremas ad te dedi literas, nondum animadvertissem D. *Newtoni* Seriem de Circuli Zonis (quam jam dudum ad me misisti) una cum Infinito istiusmodi Serierum numero, Consectarium illius esse posse, quam misi de Logarithmis: nempe, Dato Logarithmo invenire ejus Numerum; vel radicem Potestatis cujuscumque puræ in infinitam seriem permutare. Me sane tam tardi fuisse ingenii miror, qui tanto temporis spatio hoc non animadverteram, quum tamen multum olei et operæ in ista Serie expiscanda impenderam. At ut ingenue fatear, semper in animum induxeram, si modo Series esset, me in eam incidere posse, ope aliquarum e Seriebus meis pro Circulo

* [Hinc innotuit Methodum Tangentium *Gregorii* et *Slusii* ex methodo *Barrovii* consequi.] Addition.

inter se combinatis, quarum quidem plurimas ad manus habeo; neque ullam aliam desideratam Methodum. Series tua paulolum producta fit

$$2BB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \frac{21B^{13}}{6656R^{11}} - \frac{11B^{15}}{5120R^{13}} - \text{etc.}$$

Eisdem etiam positis, erit Arcus, (cujus Sinus B)

$$= B + \frac{B^3}{6R^2} + \frac{3B^5}{40R^4} + \frac{5B^7}{112R^6} + \frac{35B^9}{1152R^8} + \text{etc.}$$

Plures hujuscemodi Series proferre possem; sed Tu fortasse plus meipso de his rebus nosti.

N° XIX. *Ex Epistola D.* Collins *ad dictum D.* Gregorium, 24 Decembris *anno* 1670. *data: cujus habetur Exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.*

Quum D. *Dary* * Miscellanea sua in lucem edidit, exemplar libelli misit ad D. *Newtonum*, qui dictum D. *Dary* Serie pro Area Zonæ Circuli, quam ad te misi, remuneravit; quæ sine omni dubio Series est legitima et eximia: Ope D. *Barrovii* nonnullas alias Series e Methodo *Newtoni* generali derivatas obtinui; easque conserto colloquio deprehendi Analytice deduci posse e datis cujusvis Figuræ proprietatibus; et multas Series ad singulas Figuras applicari posse. Universalem quoque esse, cujusque ope omnes Quadraturas perficere possis, tam Curvarum quas *Cartesius* Geometricas esse admittit, quam earum quas censet Mechanicas.

Hac itaque methodo Curvæ omnium Figurarum communi proprietate definitarum rectificantur, earum Tangentes et Centra Gravitatis inveniuntur; item Rotunda earum Solida et Segmenta secunda cubantur; et in universis Curvis, Longitudine curvilinea data, ordinatim applicatæ inveniuntur, et vice versa.

Exempla quædam.

Arcu z dato, invenire Sinum x vel Co-sinum y; posita Unitate pro Radio,

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 - \text{etc.}$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10} + \text{etc.}$$

Et dato sinu x, invenire z. $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \text{etc.}$

---

* N. B. Miscellanea edidit D. *Michael Dary*, Anno 1669.

Quadratricem Veterum quod attinet, nulla Methodus, nullus Geometra ejus Aream exhibere valuit. Sit igitur AV Radius circuli inscripti Unitas, et VK Arcus x, erit Area BDVA



$$= x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{4}{13230}x^7 - \text{etc.}$$

Tractatum hac de re scripsit, in quo inventio longitudinis totius vel datæ partis Curvæ *Ellipticæ*, et *Quadratricis* DV, nec non Areæ supradictæ, est inter exempla.

Ex Epistola D. Jacobi Gregorii *ad D.* Collins, 15 *Feb. Anno* 167$\frac{0}{1}$ *data, cujus habetur Autographon.* N° XX

Ex quo Epistolam ad te dedi, tres a te accepi, unam *Decemb.* 15, alteram *Dec.* 24, tertiam 21 *Januarii* nuper elapsi datam.

Quod attinet *Newtoni* Methodum universalem, aliqua ex parte, ut opinor, mihi innotescit, tam quoad Geometricas quam Mechanicas Curvas. Nihilo tamen minus ob Series ad me missas gratias habeo, quas ut remunerem mitto quæ sequuntur.

Sit Radius $= r$, Arcus $= a$, Tangens $= t$, Secans $= s$,

Et erit $a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8}$, etc.

Eritque $t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8}$ etc.

Et $s = r + \frac{a^2}{2r} + \frac{5a^4}{24r^3} + \frac{61a^6}{720r^5} + \frac{277a^8}{8064r^7}$ etc. Sit nunc Tangens artificialis $= t$, et Secans artificialis $= s$, et integer quadrans $= q$,

Erit $s = \frac{a^2}{r} + \frac{a^4}{12r^3} + \frac{a^6}{45r^5} + \frac{17a^8}{2520r^7} + \frac{62a^{10}}{28350r^9}$ etc. Sit $2a - q = e$, et erit $t = e + \frac{e^3}{6r^2} + \frac{e^5}{24r^4} + \frac{61e^7}{5040r^6} + \frac{277e^9}{72576r^8}$ etc.

Sit nunc Secans artificialis 45 *gr.* $= s$, sitque $s + l$ Secans artificialis ad libitum, erit ejus Arcus $= \frac{1}{2}q + l - \frac{l^2}{r} + \frac{4l^3}{3r^2} - \frac{7l^4}{3r^3} + \frac{14l^5}{3r^4} - \frac{452l^6}{45r^5}$ etc., eritque $2a - q = t - \frac{t^3}{6r^2} + \frac{t^5}{24r^4} - \frac{61t^7}{5040r^6} + \frac{277t^9}{72576r^8}$ etc.

Hic animadvertendum est Radium artificialem esse 0; et ubi inveneris q majorem quam $2a$, sive artificialem Secantem 45 *gr.* majorem esse data Secante, mutanda esse Signa, et pergendum secundum vulgaris Algebræ præcepta.

Sit ellipsis cujus alter Semiaxium $= r$, alter $= c$; ex quolibet Curvæ

Ellipticæ puncto demittatur in Semiaxem r recta perpendicularis $= a$: erit Curva Elliptica perpendiculari a adjacens $= a + \frac{r^2a^3}{6c^4} + \frac{4r^2c^2a^5 - r^4a^5}{40c^8}$ $+ \frac{8c^4r^2a^7 + r^6a^7 - 4c^2r^4a^7}{112c^{12}} + \frac{64c^6r^2a^9 - 48c^4r^4a^9 + 24c^2r^6a^9 - 5r^8a^9}{1152c^{16}}$ etc.

Si determinetur Ellipseos species, Series hæc simplicior evadet. Ut si $c = 2r$, foret Curva prædicta $= a + \frac{a^3}{96r^2} + \frac{3a^5}{2048r^4} + \frac{113a^7}{458752r^6} + \frac{3419a^9}{75497472r^8}$, etc.

Reliquis vero manentibus, si Curva prædicta esset Hyperbola, prædicta quoque Series ei inserviret; si modo omnium terminorum partes affirmentur, et negentur totus terminus tertius, totus quintus, septimus *etc.* in locis imparibus.

Gratias ago maximas, tam ob benevolentiam qua mones de meditatis meis publicandis, quam ob perhumanas tuas pollicitationes. Nollem tantam molestiam tibi creare, neque mihi in animo est quicquam edere, præterquam Quadraturam meam Circuli recusam, additis quibusdam nugamentis. Quod attinet Methodum meam inveniendi Radices omnium Æquationum, una series unam tantum prodit Radicem, at pro qualibet radice infinitæ sunt series. Industria autem aliqua opus est ad seriem rite incipiendam, et ad quam pertineat radicem dignoscendam. Verum hac de re fusius forsan aliquando ad te scribam. Non est quod metuas cuiquam quicquid miserim communicare, parum enim sollicitus sum, utrumne meo an alieno nomine in publicum prodeat.

N° XXI *Ex Epistola D.* Collins *ad D.* Bertet Parisiis *tum agentem. Data autem est* 21 Februarii; *Anno* 170$\frac{0}{1}$; *ejusque exemplar manu ipsius D.* Collins *exaratum conservatur.*

Systema Algebræ Integrum componere opus est eximium, et dignum cui ab omnibus faveatur; præcipue vero quia quatuor circiter abhinc annis inventa fuit a D. *Isaaco Newtono* Methodus Analytica generalis, pro Quadratura omnium Spatiorum Curvilineorum, tam in Curvis Geometricis quam Mechanicis communi aliqua proprietate gaudentibus. Hujus ope quicquid a Quadraturis pendet peragitur, ut Rectificatio Curvarum, Inventio Tangentium et Centrorum Gravitatis; rotundorumque Solidorum et eorundem Segmentorum, secundorum et curvarum Superficierum dimensuratio: (non autem Superficierum Solidorum quorum Axes inclinantur, uti Parabolicorum Conoidum, *etc.* hæc manet difficultas posteris

superanda.) Hæc omnia peraguntur approximando verum in infinitum, absque Radicum extractione, ope infinitæ Seriei rationalium, cujusmodi multæ ad unam eandemque Figuram diversimode applicari possunt; *v. g.* ad Circulum, una ad inveniendam Aream totius vel partis cujusvis; alia ad inscriptas, alia ad adscriptas *etc.* : Ita ut dato Sinu, Tangente vel Secante inveniri potest longitudo Arcus, et vice versa, ope diversarum Serierum, ad eam rem appropriatarum. Unde fit ut jam calculo facilior inventu sit Arcus e Sinu dato, et vice versa, quam e Sinu dato Sinus dupli Arcus. Universim autem hoc nihil aliud est quam methodus a *Mercatore* usurpata, in ejus Logarithmotechnia ad Hyperbolam quadrandam, generalis reddita. —— D. *Jacobus Gregorius* apud *Scotos* nuperrime incidit in eandem methodum.

Ex Epistola D. J. Collins *in Italiam ad D.* Alphonsum Borellum *missa; et mense Decembri Anno* 1671 *data : cujus habetur exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.* N° XXII.

Kinckhuysenii Introductio ad Analysin Speciosam quam *Stel-konst* vocat, a D. *Isaaco Newtono* prælo parata est, qui jam Mathematices Professor apud Cantabrigienses factus est. Huic adjunget ipsius Methodum generalem Quadraturarum Analyticam; cujus ope calculo eruit omnium Curvilinearum Figurarum regularium, communi aliqua proprietate gaudentium, Aream; earundem Curvarum Rectificationem; inventionem Centrorum gravitatis earum; itemque rotunda Solida et Superficies eorum rotatione genitas; et Secunda istorum Solidorum Segmenta : imo dato quovis Logarithmico Sinu, Tangente vel Secante in Canone, invenire licet Arcum ei competentem, absque naturali Sinu, Tangente vel Secante prius invento, et vice versa; idque generaliter, sine ulla Radicum extractione.

Hujus Specimen pro Circulo apposui.

N. B. *In hujus Epistola exemplari, locus vacuus Seriei interserendæ hic relictus fuit.*

Ex Epistola ejusdem D. Collins *ad D.* Franciscum Vernon *Anglum Parisiis tum agentem,* Londini 26 *Decembris Anno* 1671 *data: cujus habetur exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.* N° XXIII.

D. *Barrovius* certiorem me facit D. *Newtonum* pene adornasse *Kynckhuysenii* ad Algebram Introductionem (cujus hic brevi edendæ negotium mihi

curæ erit) eamque de propria ipsius penu auctiorem reddidisse. Hic subjiciet generalem,* suam infinitarum Serierum methodum Analyticam, cujus ope computantur omnium Spatiorum curvilineorum Areæ, tum Geometricorum tum eorum quæ ex mente *Cartesii* Mechanica sunt (modo Figuræ una aliqua aut pluribus communibus proprietatibus definitæ sint) ipsarumque Curvarum longitudines, Centra Gravitatis, rotunda Solida et Superficies eorum rotatione genitæ. Hinc etiam eruuntur multæ pro Circulo Series; necnon quovis numero dato, tanquam Logarithmico Sinu, Tangente vel Secante, calculo perfacili; sine ulla Radicum extractione; sine ullis Tabulis, inveniri potest Arcus ei respondens, et vice versa; idque vero quantum velis proxime, absque naturali Sinu, Tangente, aut Secante prius invento: tot tantisque commodis fœta est hæc Doctrina, de qua non nisi comperta loquor! Una cum his mittet viginti Lectiones ejus Opticas, quas D. *Barrovius* opus censet quo majus præsens ætas vix protulit. Admonui maturandam ideo esse ejus impressionem, quoniam D. *Hugenius* tractatum de Dioptrica et de Curvarum evolutione jam molitur. Ille autem contra, se magis cupere, ut accepto harum rerum nuncio, *Hugenius* potius excitaretur quam tardaretur; ratus minime verisimile utriusque Hypotheses vel deductiones easdem esse posse.

N° XXIV. *Ex Epistola D.* J. Collins *ad D.* Thomam Strode, 26 *Julii Anno* 1672 *data. cujus habetur exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.*

Quod Geometriam curvarum figurarum spectat; hanc tandem generaliter ad Calculum Analyticum reduci posse, omnino Orbi literato novum atque inauditum est. Hujus æquationes sunt Series terminis numero infinitis conflatæ (quorum tamen pauci sufficiunt communiter) ex notis Curvarum proprietatibus erutæ. Auctorem quod attinet, hujusque methodi præstantiam, hæc accipe.

Mense *Septembri* 1668, *Mercator* Logarithmotechniam edidit suam, quæ specimen hujus Methodi (*i. e.* Serierum Infinitarum) in unica tantum Figura, nempe Quadraturam Hyperbolæ continet. Haud multo post quam in publicum prodierat liber, exemplar ejus Cl. *Wallisio Oxoniam* misi, qui

---

* N. B. *Hic Tractatus unus idemque est ac ille, cujus mentionem fecerat D.* Newtonus *in Epistola Octob.* 24. 1676. *data, per D.* Oldenburgum *D.* Leibnitio *communicata; et in quo methodi Serierum infinitarum et Fluxionum simul explicabantur, ut ibi loci memorat.*

signum de eo judicium in *Actis Philosophicis* statim fecit: aliumque *Barrovio Cantabrigiam*, qui quasdam *Newtoni* chartas (qui jam *Barrovium* in Mathematicis Prælectionibus publicis excipit) extemplo remisit: E quibus et ex aliis, quæ olim ab auctore cum *Barrovio* communicata fuerant, patet illam Methodum a dicto *Newtono* aliquot annis antea excogitatam et modo universali applicatam fuisse; ita ut ejus ope in quavis Figura Curvilinea proposita, quæ una vel pluribus Proprietatibus definitur, Quadratura vel Area dictæ Figuræ, * accurata si possibile sit, sin minus infinite vero propinqua; Evolutio vel longitudo lineæ curvæ; Centrum gravitatis Figuræ, Solida ejus rotatione genita, et eorum Superficies; sine ulla Radicum Extractione obtineri queant.

Postquam intellexerat D. *Gregorius* hanc methodum, a D. *Mercatore* in *Logarithmotechnia* usurpatam, et *Hyperbolæ* quadrandæ adhibitam, quamque adauxerat ipse *Gregorius*, jam universalem redditam esse, omnibusque Figuris applicatam; acri studio eandem acquisivit, multumque in ea enodanda desudavit.

Uterque D. *Newtonus* et *Gregorius* in animo habet hanc methodum exornare: D. *Gregorius* autem D. *Newtonum* primum ejus Inventorem anticipare haud integrum ducit.

Ex Epistola D. Collins *ad D.* Newtonum 30 *Julii Anno* 1672 *data, cujus habetur exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.* N° XXV.

Parandis Seriebus pro extrahendis radicibus in Speciebus [Algebraicis] ad modum *Vietæ* [in Numericis] credo D. *Gregorium* haud modicam impendisse operam: nihil autem de ea re scribere suscipiet, antequam Tu, methodi hujus repertor, proprias de ea lucubrationes in lucem emiseris; sed aliis rebus per interim intentus est.

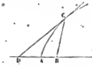
Ex Epistola D. Newtoni *ad D.* Collins, *Anno* 1672, 10 *Decembris data.* N° XXVI.
Repertum autem est ipsius Newtoni *Autographum in scriniis D.* Collins, *una cum ejusdem exemplari manu D.* Collins *descripto.*

Ex animo gaudeo D. *Barrovii* amici nostri reverendi lectiones Mathematicis exteris adeo placuisse, neque parum me juvat intelligere eos [*Slu-*

---

* [Testibus igitur *Barrovio* et *Collinio* methodus prædicta quadrandi figuras accurate si fieri pot est, *Newtono* innotuit Anno 1666 aut antea.] Addition.

sium et *Gregorium*] in eandem mecum incidisse ducendi Tangentes Methodum. Qualem eam esse conjiciam ex hoc exemplo percipies. Pone CB applicatam ad AB, in quovis angulo dato, terminari ad quamvis Curvam AC, et dicatur AB x et BC y, habitudoque inter x et y exprimatur qualibet



æquatione; puta $x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3 = 0$, qua ipsa determinatur Curva. Regula ducendi Tangentem hæc est; multiplica æquationis terminos per quamlibet progressionem arithmeticam juxta dimensiones y, puta $\underset{0}{x^3} - \underset{1}{2xxy} + \underset{0}{bxx} - \underset{0}{bbx} + \underset{2}{byy} - \underset{3}{y^3}$; ut et juxta dimensiones x, puta $\underset{3}{x^3} - \underset{2}{2xxy} + \underset{2}{bxx} - \underset{1}{bbx} + \underset{0}{byy} - \underset{0}{y^3}$. Prius productum erit Numerator, et posterius divisum per x Denominator Fractionis, quæ exprimet longitudinem BD, ad cujus extremitatem D ducenda est Tangens CD: est ergo longitudo BD $= \frac{-2xxy + 2byy - 3y^3}{3xx - 4xy + 2bx - bb}$.

Hoc est unum particulare, vel corollarium potius Methodi generalis, quæ extendit se, citra molestum ullum calculum, non modo ad ducendum Tangentes ad quasvis Curvas, sive Geometricas, sive Mechanicas, vel quomodocunque rectas lineas aliasve Curvas respicientes; verum etiam ad resolvendum alia abstrusiora Problematum genera de Curvitatibus, Areis, Longitudinibus, Centris Gravitatis Curvarum, *etc.* Neque (quemadmodum *Huddenii* methodus de *Maximis* et *Minimis*) ad solas restringitur æquationes illas, quæ quantitatibus surdis sunt immunes.

Hanc methodum intertexui * alteri isti, qua Æquationum Exegesin instituo, reducendo eas ad Series infinitas. Memini me ex occasione aliquando narrasse D. *Barrovio*, edendis Lectionibus suis occupato, instructum me esse hujusmodi methodo Tangentes ducendi. : Sed nescio quo diverticulo ab ea ipsi describenda fuerim avocatus.

Slusii Methodum Tangentes ducendi brevi publice prodituram confido: quamprimum advenerit exemplar ejus, ad me transmittere ne grave ducas.

Epistola D. Slusii *ad* Oldenburgh, *Anno* $167\frac{2}{3}$ 17 *Januarii* Leodii *data, qua continetur methodus ejus ducendi Tangentes, inter Epistolas Regiæ Societatis asservatur Lib. N°* 6. *pag.* 11. *Legitur autem impressa in Transactionibus Philosophicis N°* 90.

---

* [Sc. in Tractatu quem *Newtonus* scripsit Anno 1671. Missum autem fuit Apographum hujus Epistolæ ad *Tscurnhausium* mense Maio 1675, et ad *Leibnitium* mense Junio 1676.] Addition.

Ex Epistola D. Oldenburgh *ad D.* Slusium, *Anno* 167$\frac{2}{3}$, 29 *Januarii data, qua prædictis* Slusii *literis respondetur. Legitur autem exemplar ejus in libris Regiæ Societatis* N° 6. *pag.* 27. N° XXII.

Statui, Deo dante, prima occasione Methodum ipsam, prout Epistola tua continetur, Transactionibus Philosophicis inserere. Non ingratum interea fuerit accipere quæ Doctissimus noster *Newtonus*, in Academia *Cantabrigiensi* Mathematum Professor, de eodem argumento ad D. *Collinium* nostrum, qui te summopere et jugiter colit, nuper perscripsit in hæc verba.

« Non parum me juvat intelligere, Mathematicos exteros in eandem « mecum incidisse ducendi Tangentes methodum. Qualem eam esse conji- « ciam, ex hoc exemplo percipies. *Atque ita deinceps ut in præcedente ipsius* « Newtoni *Epistola habetur.* »

Hactenus *Newtonus*, quæ ideo nunc perscribo, ut cum novissimis tuis comparare possis.

Epistola D. Slusii *ad D.* Oldenburgh, *Anno* 1673, 3 *Maii* Leodii *data, qua continentur fundamenta Methodi Tangentium* Slusianæ, *cujusque asservatur exemplar in libris Epistolarum Reg. Societatis* N° 6. *pag.* 111. *Impressa legitur in Phil. Transact.* N° 95. N° XXIII.

Ex Epistola D. Oldenburgh *ad D.* Slusium, *Anno* 1673, 10 *Julii datæ. Legitur autem inter Epistolas Regiæ Societatis, Lib.* 6. *pag.* 196. N° XXIV.

En tibi, Vir illustrissime, impressum modum tuum demonstrandi methodum tuam ducendi Tangentes ad quaslibet Curvas, quemadmodum postremis tuis literis eum mihi communicaveras : Subticui viri nomen offensionis evitandi causa. Scripsit mihi D. *Newtonus* in hanc sententiam.

« Ex priori tua Epistola subdubitabam, existimaretne celeberrimus « *Slusius* per ea, quæ ipsi de me scripseras, me mihi tribuere methodum « ipsius ducendi Tangentes; donec intelligerem a D. *Collinio*, te ipsi signi- « ficasse, eam, ex opinione tua, serius hic inventam fuisse. Tibi quippe « videtur, eam D. *Slusio* perspectam fuisse aliquot annis priusquam ederet

« Mesolabum suum, proindeque antequam ego eam intelligerem. At si « res secus se haberet, cum tamen eam primus communicaverit amicis « suis et literato orbi, jure merito ipsi debetur. Quoad methodos illas, eæ- « dem sunt, quanquam, crediderim, ex principiis diversis derivatæ. Nescio « tamen num ipsius principia eam largiantur adeo generalem ac mea; quæ « ad æquationes terminis surdis affectas se extendunt, absque eorum ad « aliam formam reductione. »

Hæc ille, quæ in bonam partem a te acceptum iri confido.

N° XXX. *Excerpta ex Epistola D.* Gothofredi Guilielmi Leibnitii *ad D.* Oldenburgh, *Londini, Anno* $167\frac{2}{3}$, 3 *Feb. data. Hujus Autographon in scriniis Regiæ Societatis extat, et exemplar ejus in lib. Epist. dictæ Societatis N° 6. pag.* 53 *descriptum legitur.*

Cum heri apud illustrissimum *Boylium* incidissem in clarissimum *Pellium* Mathematicum insignem, ac de Numeris incidisset mentio, commemoravi ego, ductus occasione Sermonum, esse mihi methodum ex quodam differentiarum genere, quas voco generatrices, colligendi terminos Seriei cujuscunque continue crescentis vel decrescentis. Differentias autem generatrices voco, si datæ Seriei inveniantur differentiæ, et differentiæ differentiarum, et ipsarum ex differentiis differentiarum differentiæ *etc.* et series constituatur ex termino primo et prima differentia, et prima differentia differentiarum, et prima differentia ex differentiis differentiarum *etc.* ea Series erit differentiarum generatricium, ut si Series continue crescens vel decrescens fuerit *a, b, c, d.*

Posita $\backsim$ *differentiæ Nota*, differentiæ generatrices erunt.

$$1\; a.\; 2\; a\backsim b.\; 3\; \overline{\overline{a\backsim b}\backsim\overline{b\backsim c}}.\; 4\; \overline{\overline{\overline{a\backsim b}\backsim\overline{b\backsim b}}\backsim\overline{\overline{b\backsim c}\backsim\overline{c\backsim d}}}.$$

$$4\quad \overline{\overline{a\backsim b}\backsim\overline{b\backsim c}}\backsim\overline{\overline{b\backsim c}\backsim\overline{c\backsim d}}$$

$$3\quad a\backsim b\backsim b\backsim c \qquad\qquad b\backsim c\backsim c\backsim d.$$

$$2\quad a\backsim b \qquad\qquad b\backsim c \qquad\qquad c\backsim d$$

$$1\quad a \qquad\qquad b \qquad\qquad c \qquad\qquad d$$

Aut in Numeris; si Series sit Numerorum cubicorum deinceps ab unitate crescentium, differentiæ generatrices erunt numeri 0, 1, 6, 6. Voco autem generatrices, quia ex iis certo modo multiplicatis producuntur termini

Seriei; cujus usus tum maxime apparet, cum differentiæ generatrices sunt finitæ; termini autem Seriei infiniti; ut in proposito exemplo Numerorum Cubicorum.

					o		o		o			
				6		6		6		6		
			6		12		18		24		30	
		1		7		19		37		61		91
o		1		8		27		64		125		216

Hoc cum audisset clarissimus *Pellius* respondit, id jam fuisse in literas relatum a D. *Mouton* Canonico *Lugdunensi*, ex observatione nobilissimi viri *Francisci Regnaldi Lugdunensi*, dudum in literario Orbe celebris, in libro laudati D. *Mouton* de diametris apparentibus Solis et Lunæ. Ego qui ex Epistola quadam a *Regnaldo* ad *Monconisium* scripta, et Diario itinerum *Monconisiano* inserta, nomen D. *Moutoni* et designata ejus duo didiceram; Diametros Luminarium apparentes, et consilium de mensuris rerum ad posteros transmittendis; ignorabam tamen librum ipsum prodiisse : quare apud D. *Oldenburgum Societatis Regalis* Secretarium, sumtum mutuo tumultuarie percurri, et inveni verissime dixisse *Pellium*. Sed et mihi tamen dandam operam credidi, ne qua in animis relinqueretur suspicio, quasi tacito inventoris nomine alienis meditationibus honorem mihi quærere voluissem; et spero appariturum esse, non adeo egenum me meditationum propriarum ut cogar alienas emendicare. Duobus autem argumentis ingenuitatem meam vindicabo. Primo si ipsas Schedas meas confusas, in quibus non tantum inventio mea sed et inveniendi modus occasioque apparet, monstrem : deinde si quædam momenti maximi *Regnaldo Montonoque* indicta addam, quæ ab hesterno vespere confixisse me non sit verisimile, quæque non possunt facile expectari a Transcriptore.

Ex Schedis meis occasio inventi hæc apparet : quærebam modum inveniendi differentias omnis generis potestatum, quemadmodum constat differentias Quadratorum esse numeros impares; inveneramque regulam generalem ejusmodi.

Data potentia gradus dati præcedente, invenire sequentem (vel contra) distantiæ datæ vel radicum datarum; seu invenire potentiarum gradus dati utcunque distantium differentias. Multiplicetur potentia gradus, proxime præcedentis radicis majoris per differentiam radicum; et differentia potentiarum gradus proxime præcedentis multiplicetur per radicem minorem :

productorum summa erit quæsita differentia potentiarum, quarum radices sunt datæ. Eandem regulam ita inflexeram, ut sufficeret, præter radices, cujuslibet gradus, etiamsi non proxime præcedentis, potentias datarum radicum dari, ad differentias potentiarum alterius cujuscunque licet altioris gradus inveniendas. Et ostendi quod in Quadratis observatur, numeros impares esse eorum differentias, id non nisi regulæ propositæ subsumptionem esse.

His meditationibus defixus, quemadmodum in Quadratis differentiæ sunt numeri impares, ita quoque quæsivi quales essent differentiæ Cuborum; quæ cum irregulares viderentur, quæsivi differentias differentiarum, donec inveni differentias tertias esse numeros senarios. Hæc observatio mihi aliam peperit : videbam enim ex differentiis præcedentibus generari terminos differentiasque sequentes, ac proinde, ex primis, quas ideo voco generatrices, ut hoc loco o.1.6.6, sequentes omnes. Hoc concluso restabat invenire, quo additionis, multiplicationisve, aut horum complicationis genere, termini sequentes ex differentiis generatricibus producerentur. Atque ita resolvendo experiundoque deprehendi primum Terminum o componi ex prima differentia generatrice o sumta semel seu vice una : Secundum 1 ex prima o semel et secunda 1 semel : Tertium 8 ex prima o semel, secunda 1 bis et tertia 6 semel : nam $o \times 1 + 1 \times 2 + 6 \times 1 = 8$. Quartum 27, ex prima o semel, secunda 1 ter, tertia 6 ter, quarta 6 semel : nam $o \times 1 + 1 \times 3 + 6 \times 3 + 6 \times 1 = 27$, *etc.* idque Analysis mihi universale esse comprobavit. Hæc fuit occasio observationis meæ longe alia a *Moutoniana,* qui cum in Tabulis condendis laboraret, in hoc calculandi compendium cum *Regnaldo* incidit : nec vel illi vel *Regnaldo* adimenda laus; quod et *Briggius* in Logarithmicis suis jam olim talia quædam, observante *Pellio,* ex parte advertit. Mihi hoc superest ut addam nonnulla illis indicta, ad amoliendum Transcriptoris nomen; neque enim interest Reipublicæ quis observaverit, interest quid observetur. Primum ergo illud adjicio, quod apud *Moutonium* non extat, et caput tamen rei est : quinam sint illi numeri, quorum Tabulam ille exhibet in infinitum continuandam, quorum ductu in differentias generatrices, productis inter se junctis, termini Serierum generentur. Vides enim ex ipso modo quo tabula ab eo *pag.* 385. exhibetur, non fuisse id ei satis exploratum; alioqui enim verisimile est ita Tabulam fuisse dispositurum, ut ea numerorum connexio atque harmonia appareret; nisi quis de industria texisse dicat : ita enim se habet pars Tabulæ.

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
(4)	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Apparet ex hujus Tabulæ constructione solam haberi rationem correspondsus numerorum generantium cum numero Termini generati; ut cum terminus est quartus (4) producitur ex prima differentia semel, secunda ter 3, tertia ter 3, quarta semel 1; ideo in eadem (4) Linea transversa locantur 1. 3. 3. 1. Sed vel non observavit vel dissimulavit autor correspondsum numerorum, si a summo deorsum eundo per columnas disponantur hoc modo,

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
4	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Ita enim statim vera genuinaque eorum natura ac generatio apparet; esse scilicet eos numeros quos Combinatorios appellare soleo, de quibus multa dixi in dissertatiuncula de Arte Combinatoria; quosque alii appellant Ordines numericos; alii in specie primam columnam Unitatum; secundam Numerorum naturalium, tertiam Triangularium, quartam Pyramidalium, quintam Triangulo Triangularium *etc.* de quibus integer extat Tractatus *Paschalii* sub titulo Trianguli Arithmetici; in quo tamen proprietatem numerorum ejusmodi tam illustrem tamque natu-

ralem * non observatam sum miratus. Sed est profecto casus quidam in inveniendo, qui non semper maximis ingeniis maxima, sed sæpe etiam mediocribus nonnulla offert.

Hinc jam vera numerorum istorum natura et Tabulæ constructio, sive a *Regnaldo* sive a *Moutonio* dissimulata, intelligitur : semper enim terminus datus columnæ datæ componitur ex termino præcedente columnæ tam præcedentis quam datæ : Atque illud quoque apparet, non opus esse molesto calculo ad Tabulam a *Moutonio* propositam continuandam, ut ipse postulat; cum hæ numerorum Series passim jam tradantur calculenturque.

Cæterum *Moutonius* observatione ista ad interponendas medias proportionales inter duos extremos numeros datos; ego ad inveniendos ipsos numeros extremos in infinitum cum eorum differentiis, utendum censebam. Hinc ille, non nisi cum differentiæ ultimæ evanescunt (aut pene evanescunt) usum regulæ invenit; ego detexi innumerabiles casus, regula quadam inobservata comprehendendos; ubi possum ex datis numeris finitis certo modo multiplicatis producere numeros plurimarum Serierum in infinitum euntium, et si differentiæ earum non evanescant.

Ex iisdem fundamentis possum efficere in progressionibus problemata plurima; aut in Numeris singularibus, aut in Rationibus vel Fractionibus : possum enim progressiones addere subtrahereque, imo multiplicare quoque et dividere, idque compendiose.

$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{21}$
$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{20}$.	$\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{56}$
$\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{70}$.	$\frac{1}{126}$
etc.	etc.	etc.	etc.

* (1) *Vide* Paschalii *Triangulum Arithmeticum*, Parisiis *Anno* 1665 *editum*, *pag.* 2, *ubi definitionum antepenultima hæc est* :

Le nombre de chaque cellule est egal a celuy de la cellule qui la precede dans son rang perpendiculaire, plus a celuy de la cellule qui la precede dans son rang parallele. Ainsi la cellule F, *c'est a dire le nombre de la cellule* F, *egale la cellule* C *plus la cellule* E; *et ainsi des autres.*

(1) [Imo observata fuit.] Interpolation.

Multa alia circa hos numeros observata sunt a me, ex quibus illud eminet, quod modum habeo summam inveniendi Seriei Fractionum in infinitum decrescentium : quarum numerator Unitas, nominatores vero numeri isti Triangulares aut Pyramidales, aut Triangulo Triangulares *etc.*

In scriniis etiam Reg. Societatis asservantur Autographa quinque Epistolarum, Nº XXXI.
a D. Leibnitio *ad D.* Oldenburgum *eodem Anno* 1673 *scriptarum; prima autem* Londini *data est* Februarii 20, *reliquæ vero* Parisiis Martii 30, Aprilis 26, Maii 24, *et* Junii 8. *Omniumque, si secundam excipias, exemplaria leguntur in Libro Regiæ Societatis* Nº 6. *p.* 34, 101, 120 *et* 137.

Quinetiam duæ aliæ D. Leibnitii *ad* Oldenburgum *Epistolæ*, *altera Anno* 1674 Nº XXXII[1].
Julii 15, *altera* Octob. 26 *sequente*, Parisiis *datæ*, *leguntur in Lib. Regiæ Societatis* Nº 7. *pag.* 93 *et* 110, *eædemque reperiuntur impressæ in Tomo tertio Operum Mathematicorum D.* J. Wallis.

Ex harum priore 15 Julii *data.*

(1) Alia mihi Theoremata sunt, momenti non paulo majoris. Ex quibus illud imprimis mirabile est, cujus ope Area Circuli, vel Sectoris ejus dati, exacte exprimi potest per Seriem quandam Numerorum rationalium continue productam in infinitum. Sed et Methodos quasdam Analyticas habeo generales admodum et late fusas, quas majoris facio quam Theoremata particularia et exquisita.

Ex posteriore 26 Octob. data.

Porro, in ea Geometriæ parte rem memorabilem mihi evenisse nuncio. Nº XXXIII.
Scis D. Vicecomitem *Brounkerum*, et Cl. *Nic. Mercatorem* exhibuisse Infinitam Seriem numerorum rationalium, spatio Hyperbolæ æqualem. Sed hoc in Circulo efficere hactenus potuit * nemo. Etsi enim illi *Brounkerus* et

---

[1] [*Hactenus D.* Leibnitius *in Arithmetica versabatur, jam ad Geometriam se convertit, et Anno proximo ad* Oldenburgum *scribit Epistolas duas* Parisiis Jul. 15, et Oct. 36 *datas, quæ leguntur in Lib. Epist. Regiæ Societatis* Nº 7. *pag.* 93 *et* 110, *eædemque reperiuntur impressæ in Tomo tertio Operum Mathematicorum D.* J. Wallis, *et in scriniis Reg. Societatis asservantur earum Autographa.*] Altération.

(1) [Diu est quod nullas a me habuisti literas etc. —— Alia mihi...] Addition.

* *Collinius* jam ante quadriennium Series *Newtonianas*, ante triennium *Gregorianas*, cum

Wallisius dederint numeros rationales magis magisque appropinquantes; nemo tamen dedit [*imo uterque dedit; sed forte non ejus sensu,*] Progressionem Numerorum rationalium, cujus in infinitum continuatæ summa sit exacte æqualis Circulo. Sed vero mihi tandem feliciter successit. Inveni enim seriem Numerorum valde simplicem, cujus summa exacte æquatur Circumferentiæ Circuli; posito Diametrum esse Unitatem. Et habet ea Series id quoque peculiare, quod miras quasdam Circuli et Hyperbolæ exhibet harmonias. Itaque Tetragonismi Circularis Problema, jam a Geometria traductum est ad Arithmeticam Infinitorum. Quod hactenus frustra quærebatur. Restat ergo tantum, ut Doctrina de Serierum seu Progressionum numericarum summis perficiatur. Quicunque hactenus Quadraturam Circuli exactam quæsivere, ne viam quidem aperuere per quam eo pervenire posse spes sit. *Quod nunc primum a me factum dicere ausim.* Ratio Diametri ad Circumferentiam exacte a me exhiberi potest per Rationem, non quidem Numeri ad Numerum, (id enim foret absolute invenisse;) sed per rationem Numeri ad totam quandam Seriem numerorum rationalium valde simplicem et regularem. Eadem * Methodo etiam Arcus cujuslibet, cujus Sinus datur, Geometrice exhiberi per ejusmodi seriem, valor potest; nullo ad integræ Circumferentiæ dimensionem recursu. Ut adeo necesse non sit, Arcus rationem ad Circumferentiam nosse.

Nº XXXIV. *Excerpta ex Epistola D.* Oldenburg *ad D.* Leibnitium. *Anno* 1674, 8 decembris *data, cujus asservatur Autographum. Eadem autem legitur inter Epistolas Regiæ Societatis, Lib. Nº 7. pag.* 119; *estque responsum ad literas D.* Leibnitii 26 Octobris *præcedentis datas.*

Quod de profectu in Curvilinearum dimensione memoras, bene se habet : sed ignorare te nolim Curvarum dimetiendarum rationem et Methodum a laudato *Gregorio,* nec non ab *Isaaco Newtono* ad Curvas quaslibet tum Mechanicas, tum Geometricas, quin et Circulum ipsum se extendere, ita scilicet ut si in aliqua Curva Ordinatam dederis, istius Methodi beneficio

---

Amicis communicare cœpit. *Leibnitius* in *Anglia* diversabatur Anno superiore (1673) et hujusmodi Series nondum communicaverat, nec prius cum Amicis (1) communicare cœpit quam ab *Oldenburgo* acceperat, ut mox patebit; neque alias communicavit quam quas acceperat.

* Methodum exhibendi Arcum, cujus Sinus datur, *Leibnitius* ab *Oldenburgo* postea quæsivit. *Maii* 12, 1676.

(1) [In *Anglia*] Interpolation.

possis Lineæ Curvæ longitudinem, Aream figuræ, ejusdem centrum Gravitatis, Solidum rotundum ejusque superficiem sive erectam sive inclinatam, solidique rotundi segmenta secunda; horumque omnium conversa invenire: quin et dato quolibet arcn in Quadrante, Logarithmicum Sinum, Tangentem vel Secantem, non cognito naturali, et conversum computare. Quod vero ais neminem hactenus dedisse progressionem numerorum rationalium, cujus in infinitum continuatæ summa sit æqualis circulo, id vero tibi tandem feliciter successisse, de eo quidem tibi gratulor, etc.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Parisiis *Anno* 1675, 30 Martii *data. Extat Autographum scriptoris; et reperitur descripta inter Epistolas Reg. Soc.* N° 7. *pag.* 213. *Hac autem respondetur ad supradictas* Oldenburgi *literas* 8 *Decembris præcedentis datas.* N° XXXI.

Scribis clarissimum *Newtonum* vestrum habere Methodum exhibendi Quadraturas omnes, omniumque curvarum superficierum et solidorum ex revolutione genitorum dimensiones, et centrorum gravitatis inventiones, per appropinquationes scilicet, ita enim interpretor. Quæ methodus si est universalis et commoda, meretur æstimari; nec dubito fore ingeniosissimo Authore dignam. Addis tale quid *Gregorio* innotuisse.

Ex Epistola D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *Anno* 1675, 15 Aprilis *data, cujus habetur exemplar inter Epistolas Reg. Societatis N°* 7. *pag.* 216. *Hac respondetur ad D.* Leibnitii *literas* 30 *Martii præcedentis datas: Anglice autem extat manu D.* Collins *designata ac* 10 Aprilis *data, eamque Latine transtulit D.* Oldenburg *et ad D.* Leibnitium *misit.* N° XXXII

D. *Collinius* præmissa salute, quæ sequuntur remittit. Primo Cl. *Gregorium* in postrema sua ad illustrem *Hugenium* responsione Seriem suppeditasse ad semicircumferentiam circuli inveniendam, quæ talis.

Pone radium $= r$, dimidium latus quadrati inscripti circulo $= d$, et differentiam inter radium et latus quadrati $= e$: semicircumferentia æqualis est

$$\frac{4rr}{2d - \frac{e}{3} - \frac{e^2}{90d} - \frac{e^3}{756d^2} - \frac{23e^4}{113400d^3} - \frac{260e^5}{7484400d^4} - \text{etc.}}$$

in infinitum; quæ Series adeo produci potest ut a semicircumferentia minus differat quam ulla quantitas assignabilis.

Editum hoc fuit a D. *Gregorio* postquam D. *Mercatoris* Logarithmotechnia jam extabat, quæ quam primum viderat lucem, ad D. *Barrovium* a me fuit transmissa; qui observato in ea infinitæ seriei usu ad Logarithmos construendos, rescribebat Methodum illam jam aliquandiu excogitatam fuisse a successore suo *Newtonio*, omnibusque Curvis, earumque portionibus, Geometricis æque ac Mechanicis universim applicatam, cujus rei specimina quædam subjecit, viz.

Posita pro Radio Unitate, datoque x pro sinu, ad inveniendum z Arcum Series hæc est; $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 +$ etc. in infinitum. Et extracta radice hujus Æquationis methodo symbolica, si dederis z pro arcu, ad inveniendum x sinum series hæc est;

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 - \text{etc.}$$

Atque hæc Series facile continuatur in infinitum. Prioris beneficio ex Sinu 30 grad. *Ceulenii* numeri facile struuntur.

Consimiliter si ponas radium R, et B Sinum arcus: Zona inter diametrum et Chordam illi parallelam est $= 2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7}$



$- \frac{7B^{11}}{1408R^9} -$ etc. Atque eadem series mutatis signis termini secundi, quarti et sexti, etc., inservit assignandæ Areæ Zonæ æquilateris Hyperbolæ, viz.

$$AFGB = 2RB + \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} + \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} + \frac{7B^{11}}{1408R^9} - \text{etc.}$$

Rursum, dato Radio R, et Sinu verso sive sagitta a, ad inveniendam Aream segmenti resecti a Chorda: pone b^2 pro $2Ra$ et erit segmentum

$$= \frac{4ba}{3} - \frac{2a^2}{5b} - \frac{a^3}{14b^3} - \frac{a^4}{36b^5} - \frac{5a^5}{352b^7} - \frac{7a^6}{832b^9} - \text{etc.}$$

Et Arcus integer $= 2b + \frac{a^2}{3b} + \frac{3a^4}{20b^3} + \frac{5a^6}{56b^5} + \frac{35a^8}{576b^7} + \frac{63a^{10}}{1408b^9} +$ etc.

Duæ hæ Series D. *Gregorio* debentur, quas exhibuit ex eo tempore quo usus est hac Methodo; quod ab ipso aliquot post annis factum, postquam scilicet intellexerat D. *Newtonum* generatim eam applicasse. Exinde quoque ad nos misit Series similes ad Tangentes naturales ex earundem Arcubus et conversim, obtinendum. Ex. gr. pone Radium $= r$, Arcum a, Tangentem t; erit $t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} +$ etc.

Et conversim ex Tangente invenire arcum ejus * $a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} -$ etc.

Atque hoc factum cum vides, facile credideris, posse eadem Methodo æque facile ex Arcu inveniri Sinum vel Tangentem Logarithmicum absque inventione Naturalis, et conversim. Pronum quoque tibi fuerit credere Methodum hanc applicari posse ad rectificationem quarumlibet curvarum, particulatim vero ad lineam Quadraticem, et ad inveniendam Aream illius Figuræ: id quod antehac nulla demum cum methodo fuit præstitum. Atque ulteriore calculationis labore extendi potest ad inveniendas Areas Superficierum in rotundis Solidis inclinantibus, nec non ad inveniendas Soliditates secundorum segmentorum in Solidis rotundis. *E. G.* Si Conoides aliqua secetur a plano transeunte per Basin ejus, poterit id vocari Segmentum primum; et si hæc portio iterum secetur a plano recto ad planum prius secans, portio cum in modum secta hoc ipso intenditur ut sit Segmentum [secundum.]

Porro Methodus eadem applicatur inveniendis radicibus purarum potestatum, valdeque affectarum æquationum; ita ut ex quolibet numero absque Logarithmorum ope, excitare possis quamlibet potestatem per saltum, et ex quavis potestate, utut affecta, invenire Radicem ejus, vel quodvis medium illud inter et Unitatem assignatum. D. *Gregorius* magno labore paravit Seriem infinitam, generatim respectivis potestatibus affectis cujuslibet æquationis propositæ adaptandam; ita ut quivis Algebræ cultor, penu ipsius instructus, mox aptare possit Seriem aliquam ad inveniendam quamlibet Radicem cujusvis æquationis propositæ, postquam innotuit ad quod latus noti limitis Radix ceciderit. Verum id hactenus nobis non communicavit, uti nec nos illum ad id faciendum solicitavimus, imprimis cum ipse lubens permittat *Newtono*, ut ille primus novæ hujus Methodi de infinita Serie inventionem orbi Mathematico patefaciat, etc.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburgh, *Anno* 1675, 20 Maii Parisiis *data. Extat Autographon ejus, eademque legitur in Lib. Epist. Regiæ Societatis N° 7. pag.* 235. *Responsum autem est ad prædictas D.* Oldenburgi *literas* 15 Aprilis *datas.* N° XXXVII.

Literas tuas multa fruge Algebraica referias accepi, pro quibus tibi et doctissimo *Collinio* gratias ago. Cum nunc præter ordinarias curas Mecha-

---

* Hanc Seriem D. *Collins* initio anni 1671 a *Gregorio* acceperat ut supra; D. *Leibnitius* eandem cum amicis in *Gallia* hoc anno ut suam communicavit, celata hac Epistola.

nicis imprimis negotiis distrahar, non potui examinare Series quas misistis, ac cum * meis comparare. Ubi fecero, † perscribam tibi Sententiam meam: nam aliquot jam anni sunt quod inveni meas via quadam sic satis singulari. *Collinium* ipsum magni facio, quoniam omnes puræ Matheseos partes ab ipso egregie cultas video. Multa habeo destinata a quibus me deterrent calculi tantum, qui nec suscipi facile ab homine occupato, nec alteri nisi doctissimo ac sincerissimo tuto credi possunt.

N° XXXVIII. *Ex Actis Eruditorum Anno* 1691 *Mense* Aprili *pag.* 178, *habentur hæc D.* Leibnitii *verba.*

Jam Anno 1675 *compositum habebam* ** *opusculum Quadraturæ Arithmeticæ ab amicis ab illo tempore lectum, sed quod, materia sub manibus crescente, limare ad editionem non vacavit; postquam aliæ occupationes supervenere, præsertim cum nunc prolixius exponere vulgari more, quæ Analysis nostra nova paucis exhibet, non satis operæ pretium videatur. Interim insignes quidam Mathematici, quibus veritas primariæ nostræ Propositionis dudum in Actis publicatæ innotuit, pro humanitate sua nostri qualiscunque inventi candide meminere.*

---

* His verbis patet Series, quas D. *Leibnitius* se ante annos aliquot invenisse professus est, a communicatis diversas fuisse. Subjungit etiam ipse verbis disertis *sua a Communicatis longe diversa esse circa hanc rem meditata.* Vid. Epist. *Maii* 12, 1676.

† *N. B.* Hoc nunquam fecit D. *Leibnitius*, sed ubi Series duas primas per *Mohrum* quendam demum accepisset, postulavit Methodum D. *Newtoni* perveniendi ad istas duas Series ad se mitti, quasi nullas prius ab *Oldenburgo* accepisset. Et hoc pacto Epistolam *Oldenburgi* oblivioni tradendo, licentiam obtinuit Serierum ab eo acceptarum ultimam sibi vindicandi.

** Quadratura Arithmetica, de qua hic agitur, ea est quam *Gregorius* cum D. *Collinio* initio Anni 1671, *Oldenburgus* cum D. *Leibnitio* hoc Anno communicavit. De hac Quadratura D. *Leibnitius* opusculum vulgari more composuit et cum amicis hoc anno communicare cœpit: Anno proximo scriptum polivit ut cum *Oldenburgo* communicaretur: Anno tertio in patriam redux Negotiis publicis interesse cœpit, et materia sub manibus crescente opus ad Editionem limare non amplius vacavit. Sed neque operæ pretium duxit subinde prolixius exponere vulgari more quæ Analysis sua nova paucis exhibet. Inventa est igitur hæc Analysis postquam D. *Leibnitius* opusculum vulgari more compositum polire et limare desiit, et Negotiis publicis interesse cœpit.

Excerpta ex Schediasmatis manu D. Collins *exaratis et in scriniis ejus repertis, et nonnullis in locis* Oldenburgi *calamo castigatis; quæ quidem D.* Oldenburg *D.* Tschürnhausio *transmittenda acceperat et Latine verterat. Extant autem tum autographa D.* Collins, *tum responsum ad eadem D.* Oldenburgo *redditum, cum Titulo manu ejus inscripto* « Responsum ad scriptum D. *Collinii* de *Cartesii* Inventis. » (1) N° XXXIX.

Nonnulli *Cartesium* arrogantiæ insimularunt, asserentem se ex omnibus modis Methodisve possibilibus, in optimam simplicissimamque incidisse : an ullibi hoc affirmaverit *Cartesius* plane nescio, certum tamen est methodum ducendi Tangentes multum promotam fuisse a *Newtono* et *Gregorio*. Ita liquet ex *Newtoni* Epistola Anno 1672, 10 *Decemb.* data. *Vide pag.* 29 *. (2)

Ex Epistola D. Oldenburg *ad* Leibnitium, *Anno* 1675, 24 Junii *data, et in Lib. Epist. Regiæ Societatis N°* 7. *pag.* 243 *descripta. Responsum autem est ad præcedentes D.* Leibnitii *Literas* 20 Maii *datas.* N° XL.

Dominus *Newtonus*, beneficio Logarithmorum graduatorum in scalis παραλλήλως locandis ad distantias æquales, vel circulorum concentricorum eo modo graduatorum adminiculo, invenit radices Æquationum. Tres regulæ rem conficiunt pro Cubicis, quatuorpro Biquadraticis. In harum dispositione respectivæ Coefficientes omnes jacent in eadem Linea recta ; a cujus puncto tam remoto a prima Regula ac scalæ graduatæ sunt ab invicem, Linea recta iis superextenditur, una cum præscriptis conformibus genio æquationis, qua in regularum una datur potestas pura radicis quæsitæ.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Parisiis *Anno* 1675, 12 Julii *data. Hujus extat Autographum; habeturque Exemplar ejus in Lib. Epist. Reg. Societatis, N°* 7. *pag.* 149. *Responsum autem est ad Literas præcedentes D.* Oldenburgi, *et impressa legitur inter opera D.* Wallisii. *In hac perperam scribitur* Parius *pro* Darius. N° XLI.

Methodum celeberrimi *Newtoni*, radices Æquationum inveniendi per Instrumentum, credo differre a mea. Neque enim video, in mea, quid aut Logarithmi aut Circuli concentrici conferant. Quoniam tamen rem Vobis

(1) [Accep. d. 8 Junii 1675.] Addition.

* Id est N° XXVI. [F. L.]

(2) [N. B. *In hoc Schediasmate habetur Apographum Epistolæ hujus, ut et Apographum Epistolæ* Gregorii *ad* Collins 5 *Sept.* 1670. *supra impressæ.*] Addition.

non ingratam video, conabor absolvere, ac tibi communicare, quamprimum otii sat erit.

Scripsisti aliquoties, Vestrates omnium Curvarum dimensiones per appropinquationem dare. Velim nosse, an possint dare Geometrice Dimensionem Curvæ Ellipseos vel Hyperbolæ ex data Circuli aut Hyperbolæ quadratura.

N° XLII. *Ex Epistola D.* Oldenburgi *ad D.* Leibnitium, *Anno* 1675, 30 Septemb. *data. Cujus extat Exemplar manu D.* Oldenburg *descriptum. Legitur etiam in Lib. Regiæ Societatis, N° 7. pag.* 159, *et Responsum est ad præcedentem.*

Scriptum quoddam Belgicum Belga quidam *Georgius Mohr* vocatus, Algebræ et Mechanicæ probe peritus, apud *Collinium* nostrum reliquit, qui apographum ejus, quale hic insertum vides, impertire tibi voluit. —— *Tschürnhausius* nuper *Parisios* hinc profectus est, et te sine dubio jam salutavit. —— Scire cupis an dare nostrates Geometrice possint dimensionem Curvæ Ellipseos aut Hyperbolæ, ex data Circuli aut Hyperbolæ quadratura. Ait *Collinius* illos id præstare non posse Geometrica præcisione, sed dare eos posse ejusmodi approximationes quæ quacunque quantitate data minus a scopo aberrabunt. Et speciatim quod attinet alicujus arcus circuli rectificationem, impertiri tibi poterit laudatus *Tschurlmausius* Methodum à *Gregorio* nostro inventam, quam cum apud nos esset, *Collinius* ipsi communicavit.

N° XLIII. *Ex Epistola D.* Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Parisiis 28 Decembris *Anno* 1675 *data. Extat Autographum ejus, describiturque in Lib. Reg. Societatis N° 7. pag.* 189. *et a D.* Wallisio *impressa est.*

(1) Quod *Tschürnhausium* ad nos misisti, fecisti pro amico : multum enim ejus consuetudine delector, et ingenium agnosco in Juvene præclarum et magna promittens. Inventa mihi ostendit non pauca, Analytica et Geometrica, sane perelegantia. Unde facile judico, quid ab eo expectari possit.

Habebis et a me Instrumentum Æquationes omnes Geometricas construendi unicum : Et meam Quadraturam Circuli ejusque partium, per Seriem Numerorum Rationalium infinitam; de qua aliquoties scripsi, et quam jam plusquam Biennio abhinc Geometris hic communicavi.

---

(1) [Duarum tibi literarum debitor, rogo ne sequius interpreteris silentium meum, soleo enim interrumpi nonnunquam, et hæc studia per intervalla tractare.] Addition

Ex epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg, Parisiis 12 Maii *Anno* 1676 *data, cujus Autographum in scriniis Regiæ Societatis asservatur, cum Notis manu* Oldenburgi *in tergo scriptis.* N° XLIV.

Cum *Georgius Mohr* Danus [*superius Belga*] in Geometria et Analysi versatissimus, nobis attulerit communicatam sibi a Doctissimo *Collinio* vestro expressionem relationis inter Arcum et Sinum per infinitas Series sequentes: Posito Sinu x, Arcu z, Radio 1. $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9$ etc. $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$ etc.

Hæc * Inquam, cum nobis attulerit ille, quæ mihi valde ingeniosa videntur, et posterior imprimis Series elegantiam quandam singularem habeat, ideo rem gratam mihi feceris, Vir Clarissime, si demonstrationem transmiseris. Habebis vicissim mea ab his longe diversa circa hanc rem meditata, de quibus jam aliquot abhinc Annis ad te perscripsisse credo, demonstratione tamen non addita quam † nunc polio. Oro ut Cl. *Collinio* multam a me salutem dicas: is facile tibi materiam suppeditabit satisfaciendi desiderio meo.

Ex Epistola D. Collins *ad D.* Oldenburgum, *D.* Leibnitio *tum* Parisiis *agenti transmittenda. Hujus exemplar, Anno* 1676. 14 Junii, *manu ipsius D.* Collins *descriptum, ac in scriniis ejus repertum etiamnum conservatum est.* N° XLV.

Respondeas, si placet, ad ea quæ quærit D. *Leibnitius* in Literis ejus 12 *Maii* datis, Seriei primæ numeros Coefficientes, $\frac{1}{6}, \frac{3}{40}, \frac{5}{112}, \frac{35}{1152}$, hoc modo compositos esse, $\frac{1\times 1}{2\times 3} = \frac{1}{6}$, et $\frac{1}{6}\times\frac{3\times 3}{4\times 5} = \frac{3}{40}$, et $\frac{3}{40}\times\frac{5\times 5}{6\times 7} = \frac{5}{112}$, et $\frac{5}{112}\times\frac{7\times 7}{8\times 9} = \frac{35}{1152}$, et $\frac{35}{1152}\times\frac{9\times 9}{10\times 11} = \frac{63}{2816}$, atque ita deinceps in infinitum: unde intelligi possit hanc Seriem elegantia minime cedere conversæ ejusdem, quæ tamen illi magis arridet. Meditata ejus de eodem Argumento, cum fundamentis plane diversis innitantur, non possunt nobis non esse acceptissima; atque exoptamus ea fidem nostram exuperare posse. Hujus autem Methodi ea est præstantia, ut cum tam late pateat, ad nullam hæreat

* Quasi ante annum easdem non accepisset ab *Oldenburgo.*

† Opusculum prædictum de Quadratura Arithmetica D. *Leibnitius* polire perrexit.

difficultatem. *Gregorium* autem aliosque in ea fuisse opinione arbitror, ut quicquid uspiam antea de hac re innotuit, quasi dubia diluculi lux fuit, si cum meridiana claritate conferatur.

N° XLVI. *Hoc Anno, cum D.* Gregorius (1) *emortuus esset, quæ cum Amicis communicaverat in unum corpus solicitante D.* Leibnitio *collecta sunt. Et extat collectio manu D.* J. Collins *exarata, cum hoc Titulo;*

* *Excerpta ex D.* Gregorii *Epistolis cum D.* Leibnitio *communicanda, tibique postquam perlegerit ille reddenda. Et sic orditur.*

† *D.* H. Oldenburg *Armigero.*

Quandoquidem impense rogasti me, permotus solicitationibus D. *Leibnitii* et aliorum ex *Academia Regia Parisina*, ut Historiolam aliquam concinnarem, Studia et Inventa doctissimi D. *Jacobi Gregorii* nuper defuncti exhibentem; quoniamque arcta inter nos amicitia, crebraque dum viveret literarum reciprocatio fuit : In honorem Nominis ejus, quæcunque majoris momenti in literis ejus occurrunt, summa fide in unum colligere statuo, etc.

* *Extracts from Mr.* Gregory's *Letters, to be lent Monsieur* Leibnitz *to peruse; who is desir'd to return the same to you.*

† *To* H. Oldenburg, *Esq;*

SIR,

Forasmuch as you have much pressed me your self, being incited thereto by the earnest Desires of Mr. *Leibnitz* and others of the Royal Academy at *Paris*, to give an Account of the great Pains and Attainments of the late learned Mr. *James Gregory*, deceas'd; there being a great Friendship, and frequent Correspondence between us in his Life time; I shall for the Honour I bear to his Memory, impartially give you an Account of the most material Passages in his Letters.

In hac Collectione habetur (2) *Epistola superius impressa, qua* Gregorius *Quadraturam prædictam Arithmeticam initio Anni* 1671 *cum D.* Collins *communicavit: Habetur et Epistola D.* Newtoni *ad D.* Collins, 10 Decemb. 1672 *data, et superius impressa, in qua* Newtonus *se Methodum generalem habere dixit ducendi Tangentes, quadrandi Curvilineas, et similia peragendi; et Methodum Exemplo ducendi Tangentes exponit : quam Methodum D.* Leibnitius differentialem *postea vocavit* (3).

---

(1) [*Anno superiore ad finem vergente.*] Interpolation.

(2) [*Epistola superius impressa* Gregorii *ad* Collins 5 Sept. 1670. *Habetur et*] Interpolat.

(3) [*Hæc collectio ad D.* Leibnitium *missa fuit* 26 Junii 1676.] Addition

Ex Epistola D. Collins *ad D.* Davidem Gregorium *prædicti* Jacobi Gregorii *nuper defuncti fratrem. Data autem est Anno* 1676, 11 Augusti, *ejusque habetur exemplar manu ipsius D.* Collins *descriptum.* N° XXVII.

Historiolam composui, qua in unum congessi quæcunque unquam a Fratre tuo de rebus Mathematicis, vel literis aliasve scripto, vel colloquio acceperim : eo fine ut eandem scriniis Regiæ Societatis (cujus erat sodalis) commissam et asservatam, Amici ejus inspicere possint, vel si libuerit soluto pretio transcriptam habere. Constat autem duodecim circiter schedis. Me vero nihil omisisse quod alicujus momenti esse poterit, si nonnulla cum *Hugenio* aliisve controversa excipias, aras sacras juraturus contingere ausim. Mathematicis *Gallis* quousque profecerat, quæque reliquerat Frater tuus, scire aventibus, me operam dedisse ut iis satisfacerem, ex sequentibus comperies. *Sub finem autem exemplaris hujus Epistolæ hæc subjunxerat D.* Collins.

Eruditi ex Academia Regia *Parisiensi*, audita D. *Gregorii* morte, cupide sciscitabantur ea quæ moriens reliquerat; simulque narrationem eorum quæ attinent doctrinam Serierum infinitarum apud nos repertam petebant : Sequentem ideo ad eos transmittendam curavi, ac deinde ad *Davidem Gregorium* Fratrem *Jacobi* superstitem.

Quod attinet Doctrinam Serierum infinitarum; *Mercator* in Logarithmotechnia sua primum Specimen ejus orbi exhibuit, applicando eam ad Hyperbolæ Quadraturam tantum, et ad Logarithmorum Constructionem, absque radicum extractione. Hanc ipsam ejus doctrinam a D. *Wallisio* in Transact. Philosoph. illustratam habemus; eamque postea adauxit et promovit D. *Gregorius* in Exercitationibus ejus Geometricis eodem anno editis.

Paucos post menses quam editi sunt hi Libri, missi sunt ad D. *Barrovium Cantabrigiæ:* ille autem responsum dedit, hanc infinitarum Serierum doctrinam jam ante biennium a D. *Isaaco Newtono* inventam fuisse, et quibusvis Figuris generaliter applicatam; simulque transmisit D. *Newtoni* opus manuscriptum, a D. *Collins* deinde cum D. Vicecomite *Brounker* Regiæ Societatis tum Præsidi communicatum. *Barrovio* autem cathedram Mathematicam abdicante, *Newtonus* ab eodem commendatus in successorem ejus electus est, et de hac Doctrina publice prælegit; Lectionesque ejus in Bibliotheca publica *Cantabrigiensi* asservantur.

Collins deinde, mediante D. *Barrovio*, D. *Newtono* familiaris factus literarum commercium cum eo habuit; et ab eo Epistolam obtinuit 10 *Decem-*

bris Anno 1672 datam, qua docet modum ducendi Tangentes ad Curvas Geometricas, ope Æquationis qua relatio inter Ordinatim applicatas et Abscissas exprimitur. *Vide Epistolam hanc pag.* 29, 30 *.

Collins etiam in diversis literis Anno 1669 ad D. *Gregorium* datis, eidem significavit *Newtoni* in hac materia successus. *Gregorius* autem contra, se quoque plures habere pro circulo Series; simulque petiit nonnullas e *Newtonianis*, quas cum propriis conferre voluit, ad se mitti. Misit igitur aliquas D. *Collins*, quas *Gregorius* a suis prorsus diversas, et faciliores calculoque aptiores inveniens, haud levi studio in eandem ipsam *Newtoni* Methodum incidit, circa Annum exeuntem 1670: sicut ipse aperte in Epistola 19 *Decemb.* testatur. *Pag.* 23 †.

Cum D. Leibnitius *Methodum perveniendi ad Series Anno superiori sibi missas desideraret, et ut* Gregoriana *omnia* Lutetiam Parisiorum *mitterentur*: Oldenburgus *et* Collins Newtonum *enixe rogarunt ut ipse Methodum suam describeret cum D.* Leibnitio *communicandam*.

Nº XLVIII *Epistola prior D.* Isaaci Newton, *Matheseos Professoris in Celeberrima Academia* Cantabrigiensi; *ad D.* Henricum Oldenburg, *Regalis Societatis* Londini *Secretarium*; 13 Junii 1676, *cum Illustrissimo Viro D.* Godfredo Gulielmo Leibnitio (*eo mediante*) *communicanda. Literis* Oldenburgi, (26 Junii [1]) *ad* Leibnitium *missa*.

Quanquam D. *Leibnitii* modestia, in Excerptis quæ ex Epistola ejus ad me nuper misisti, Nostratibus multum tribuat circa Speculationem quandam *Infinitarum Serierum*, de qua jam cœpit esse rumor: Nullus dubito tamen quin ille, non tantum, *quod asserit*, Methodum reducendi Quantitates quascunque in ejusmodi Series, sed et varia Compendia, forte nostris similia si non et meliora, adinvenerit.

Quoniam tamen ea scire pervelit quæ ab Anglis hac in re inventa sunt; et ipse ante annos aliquot in hanc Speculationem inciderim: Ut votis ejus aliqua saltem ex parte satisfacerem, nonnulla eorum quæ mihi occurrerunt ad te transmisi.

Fractiones in Infinitas Series reducuntur per Divisionem; et Quantitates Radicales per Extractionem Radicum; perinde instituendo Operationes

---

* Id est Nº XXVI. [F. L.]
† Id est Nº XVIII. [F. L.]
[1] *Lege* Julii. [F. L.]

istas in Speciebus, ac institui solent in Decimalibus Numeris. Hæc sunt Fundamenta harum Reductionum.

Sed Extractiones Radicum multum abbreviantur per hoc * *Theorema*.

$$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc.}$$

Ubi $P+PQ$ significat Quantitatem cujus Radix, vel etiam Dimensio quævis, vel Radix Dimensionis, investiganda est. P, Primum Terminum quantitatis ejus; Q, reliquos terminos divisos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem Indicem dimensionis ipsius $P+PQ$: sive dimensio illa Integra sit, sive (ut ita loquar) Fracta; sive Affirmativa, sive Negativa. Nam, sicut Analystæ, pro aa, aaa, etc. scribere solent a^2, a^3, etc. sic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^2}$, etc. scribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{2}{3}}$; et pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$, scribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}. Et sic pro $\frac{aa}{\sqrt{c.a^3+bbx}}$ scribo $aa \times \overline{a^3+bbx}|^{-\frac{1}{3}}$; et pro $\frac{aab}{\sqrt{c:\overline{a^3+bbx} \times \overline{a^3+bbx}:}}$ scribo $aab \times \overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$. In quo ultimo casu, si $\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur esse $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}$ in Regula: erit $P=a^3$, $Q=\frac{bbx}{a^3}$, $m=-2$, $n=3$. Denique, pro terminis inter operandum inventis in Quoto, usurpo A, B, C, D, etc. Nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$; B pro secundo $\frac{m}{n}AQ$; et sic deinceps. Cæterum usus Regulæ patebit Exemplis.

Exemplum 1. Est $\sqrt{cc+xx}$ (seu $\overline{cc+xx}|^{\frac{1}{2}}$) $= c + \frac{xx}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} - \text{etc.}$ Nam, in hoc casu, est $P=cc$, $Q=\frac{xx}{cc}$; $m=1$, $n=2$, $A\left(=P^{\frac{m}{n}}=cc^{\frac{1}{2}}\right)=c$. $B\left(=\frac{m}{n}AQ\right)=\frac{xx}{2c}$; $C\left(=\frac{m-n}{2n}BQ\right)=-\frac{x^4}{8c^3}$. Et sic deinceps.

Exemplum 2. Est $\sqrt{5:c^5+c^4x-x^5}$: (id est $\overline{c^5+c^4x-x^5}|^{\frac{1}{5}}$) $= c + \frac{c^4x-x^5}{5c^4} - \frac{2c^3xx+4c^2x^6-2x^{10}}{25c^9} + \text{etc.}$ Ut patebit substituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P, et $\frac{c^4x-x^5}{c^5}$ pro Q. Potest etiam $-x^5$

---

* Resolutionem Binomii in hujusmodi Seriem Anno 1669 *Newtono* innotuisse patet, ex Analysi supra impressa, pag. 19, lin. 19, 20 [1].

[1] Id est pag. 73, lin. 23. [F.-L.]

substitui pro P, et $\frac{c^4x + c^5}{-x^5}$ pro Q. Et tunc evadet $\sqrt{5 : c^5 + c^4x - x^5} := -x$ $+ \frac{c^4x + c^5}{5x^4} + \frac{2c^8xx + 4c^9x + c^{10}}{25x^9}$ + etc. Prior modus eligendus est si x valde parvum sit; posterior, si valde magnum.

Exemplum 3. Est $\frac{N}{\sqrt{c : y^3 - a^2y}}$ (hoc est, $N \times \overline{y^3 - a^2y}|^{-\frac{1}{3}}$) æqualis $N \times \frac{1}{y} + \frac{aa}{3y^3} + \frac{2a^4}{9y^5} + \frac{14a^6}{81y^7}$ etc. Nam $P = y^3$. $Q = -\frac{aa}{yy}$. $m = -1$, $n = 3$. A $\left(P^{\frac{m}{n}} = y^{3\times-\frac{1}{3}}\right) = y^{-1}$, hoc est $\frac{1}{y}$. B $\left(= \frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{y} \times -\frac{aa}{yy}\right) = \frac{aa}{3y^3}$, etc.

Exemplum 4. Radix Cubica ex Quadrato-quadrato ipsius $d + e$, (hoc est, $\overline{d + e}|^{\frac{4}{3}}$) est $d^{\frac{4}{3}} + \frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}}$ + etc. Nam $P = d$. $Q = \frac{e}{d}$. $m = 4$. $n = 3$. A $\left(= P^{\frac{m}{n}}\right) = d^{\frac{4}{3}}$ etc.

Exemplum 5. Eodem modo simplices etiam potestates eliciuntur. Ut, si quadrato-cubus ipsius $d + e$, (hoc est, $\overline{d + e}|^5$ seu $\overline{d + e}|^{\frac{5}{1}}$) desideretur: Erit juxta Regulam, $P = d$. $Q = \frac{e}{d}$. $m = 5$ et $n = 1$. Adeoque A $\left(= P^{\frac{m}{n}}\right) = d^5$. B $\left(= \frac{m}{n} AQ\right) = 5d^4e$, et sic $C = 10d^3ee$. $D = 10dde^3$. $E = 5de^4$. $F = e^5$, et G $\left(= \frac{m - 5n}{6n} FQ\right) = 0$. Hoc est, $\overline{d + e}|^5 = d^5 + 5d^4e + 10d^3ee + 10dde^3 + 5de^4 + e^5$.

Exemplum 6. Quinetiam Divisio, sive simplex sit, sive repetita, per eandem Regulam perficitur. Ut si $\frac{1}{d + e}$ (hoc est, $\overline{d + e}|^{-1}$ sive $\overline{d + e}|^{-\frac{1}{1}}$) in seriem simplicium terminorum resolvendum sit: Erit, juxta Regulam, $P = d$. $Q = \frac{e}{d}$. $m = -1$. $n = 1$, et A $\left(= P^{\frac{m}{n}} = d^{-\frac{1}{1}}\right) = d^{-1}$ seu $\frac{1}{d}$. B $\left(= \frac{m}{n} AQ = -1 \times \frac{1}{d} \times \frac{e}{d}\right) = -\frac{e}{dd}$. Et sic $C = \frac{ee}{d^3}$. $D = -\frac{e^3}{d^4}$ etc. Hoc est, $\frac{1}{d + e} = \frac{1}{d} - \frac{e}{dd} + \frac{ee}{d^3} - \frac{e^3}{d^4}$, etc.

Exemplum 7. Sic et $\overline{d + e}|^{-3}$, (hoc est Unitas ter divisa per $d + e$, vel semel per cubum ejus) evadit $\frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6ee}{d^5} - \frac{10e^3}{d^6}$ + etc.

Exemplum 8. Et $N \times \overline{d + e}|^{-\frac{1}{3}}$, (hoc est, N divisum per radicem cubi-

cam ipsius $d + e$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}} +$ etc.

Exemplum 9. Et $N \times \overline{d + e}|^{-\frac{3}{5}}$ (hoc est, N divisum per radicem quadrato-cubicam ex Cubo ipsius $d + e$, sive $\frac{N}{\sqrt{5: d^3 + 3dde + 3dee + e^3}}$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{3}{5}}} - \frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}} + \frac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}} - \frac{52e^3}{125d^{\frac{18}{5}}} +$ etc.

Per eandem Regulam, Geneses Potestatum, Divisiones per Potestates aut per Quantitates Radicales et Extractiones Radicum altiorum in Numeris, etiam commode instituuntur.

Extractiones Radicum Æquationum Affectarum in Speciebus imitantur earum Extractionem in Numeris. Sed Methodus *Vietæ* et *Oughtredi* nostri huic negotio minus idonea est. Quapropter aliam excogitare adactus sum, *cujus specimina, ne repetantur, vide in Tractatu de Analysi, etc., pag.* 9, 10, etc [1].

Dicam tantum in genere, Quod radix cujusvis Æquationis semel extracta, pro Regula resolvendi consimiles æquationes asservari possit; quodque ex pluribus ejusmodi Regulis, Regulam Generaliorem plerumque efformare liceat; et quod Radices omnes, sive simplices sint sive affectæ, modis infinitis extrahi possint, de quorum simplicioribus itaque semper consulendum est.

Quomodo ex Æquationibus sic ad Infinitas Series reductis, Areæ et Lon- Nº XLIX.
gitudines Curvarum, contenta et Superficies solidorum, vel quorumlibet Segmentorum figurarum quarumvis, eorumque Centra Gravitatis determinentur; et quomodo etiam Curvæ omnes Mechanicæ ad ejusmodi Æquationes Infinitarum Serierum reduci possint, indeque Problemata circa illas resolvi perinde ac si Geometricæ essent; nimis longum foret describere. Sufficiat Specimena quædam talium Problematum recensuisse : Inque iis, brevitatis gratia, litteras A, B, C, D, etc., pro terminis Seriei, sicut sub initio, nonnunquam usurpabo.

1. Si ex dato Sinu Recto, vel Sinu Verso, Arcus desideretur : Sit radius r et sinus rectus x : Eritque Arcus $= x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} +$ etc. Hoc est, $= x + \frac{1 \times 1 \times xx}{2 \times 3 \times rr} A + \frac{3 \times 3xx}{4 \times 5rr} B + \frac{5 \times 5xx}{6 \times 7rr} C + \frac{7 \times 7xx}{8 \times 9rr} D +$ etc. Vel sit d diameter, ac x sinus versus; et erit Arcus $= d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}}$

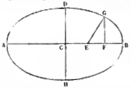
[1] Voyez page 61 et suivantes, et le Supplément au *Comm. Epist.*

$+\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}$, etc. Hoc est, $= \sqrt{dx}$ in $1 + \frac{x}{6d} + \frac{3xx}{40dd} + \frac{5x^3}{112d^3} +$ etc.

2. Si vicissim ex dato Arcu desideretur Sinus : Sit radius r, et arcus z : Eritque sinus rectus $= z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} -$ etc. Hoc est, $= z - \frac{zz}{2\times 3rr}A - \frac{zz}{4\times 5rr}B - \frac{zz}{6\times 7rr}C -$ etc. Et sinus versus $= \frac{zz}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \frac{z^8}{40320r^7} +$ etc. Hoc est, $\frac{zz}{1\times 2r} - \frac{zz}{3\times 4rr}A - \frac{zz}{5\times 6rr}B - \frac{zz}{7\times 8rr}C -$ etc.

3. Si Arcus capiendus sit in ratione data ad alium Arcum : Esto diameter $= d$, chorda arcus dati $= x$, et arcus quæsitus ad arcum illum datum ut n ad 1 : Eritque arcus quæsiti Chorda $= nx + \frac{1-nn}{2\times 3dd}xxA + \frac{9-nn}{4\times 5dd}xxB + \frac{25-nn}{6\times 7dd}xxC + \frac{49-nn}{8\times 9dd}xxD + \frac{81-nn}{10\times 11dd}xxE +$ etc.

Ubi nota, quod cum n est numerus impar, Series desinet esse infinita, et evadet eadem quæ prodit per vulgarem Algebram, ad multiplicandum datum angulum per istum numerum n.



4. Si in Axe alterutro AB Ellipseos ADB (cujus centrum C, et axis alter DH) detur punctum aliquod E, circa quod recta EG, occurrens Ellipsi in G, motu angulari feratur ; et ex data Area sectoris Elliptici BEG, quæratur recta GF, quæ a puncto G ad axem normaliter demittitur : Esto BC $= q$, DC $= r$, EB $= t$, ac duplum areæ BEG $= z$;

Et erit GF $= \frac{z}{t} - \frac{q}{6rrt^4}z^3 + \frac{10qq - 9qt}{120r^4t^7}z^5 - \frac{280q^3 + 504qqt - 225qtt}{5040r^6t^{10}}z^7$ [1] $+$ etc.

Sic itaque Astronomicum illud *Kepleri* Problema resolvi potest.

5. In eadem Ellipsi, si statuatur CD $= r$, $\frac{\overline{CB}^2}{CD} = c$ et CF $= x$: Erit arcus Ellipticus DG

$$
\begin{array}{l}
= x + \frac{1}{6cc}x^3 + \frac{1}{10rc^3}x^5 + \frac{1}{14rrc^4}x^7 + \frac{1}{18r^3c^5}x^9 + \frac{1}{22r^4c^6}x^{11} + \text{etc.} \\
\qquad\qquad - \frac{1}{40c^4} - \frac{1}{28rc^5} - \frac{1}{24rrc^6} - \frac{1}{22r^3c^7} \\
\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{112c^6} + \frac{1}{48rc^7} + \frac{3}{88rrc^8} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{5}{1152c^8} - \frac{5}{352rc^9} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{7}{2816c^{10}}.
\end{array}
$$

---

[1] Pour l'exactitude, il faut écrire : $-\frac{280q^3 - 504q^2t + 225qt^2}{5040r^6t^{10}}z^7$. [Remarque de Horsley.]

Hic numerales Coefficientes supremorum terminorum $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14} \text{ etc.}\right)$ sunt in Musica progressione: Et numerales coefficientes omnium inferiorum in unaquaque columna prodeunt multiplicando continuo numeralem Coefficientem supremi termini per terminos hujus progressionis $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, $\frac{\frac{3}{3}n-3}{4}$, $\frac{\frac{5}{4}n-5}{6}$, $\frac{\frac{7}{5}n-7}{8}$, $\frac{\frac{9}{6}n-9}{10}$, etc. Ubi n significat numerum dimensionum ipsius e in denominatore istius supremi termini. *E. g.* ut terminorum infra $\frac{1}{22 r^5 e^6}$ numerales coefficientes inveniantur, pono $n = 6$, ducoque $\frac{1}{22}$ (numeralem coefficientem ipsius $\frac{1}{22 r^5 e^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, hoc est in 1; et prodit $\frac{1}{22}$ numeralis coefficiens termini proxime inferioris: dein duco hunc $\frac{1}{22}$ in $\frac{\frac{3}{3}n-3}{4}$, sive in $\frac{n-3}{4}$, hoc est, in $\frac{3}{4}$: et prodit $\frac{3}{88}$ numeralis coefficiens tertii termini in ista columna. Atque ista $\frac{3}{88} \times \frac{\frac{5}{4}n-5}{6}$ facit $\frac{5}{352}$ numeralem coefficientem quarti termini; et $\frac{5}{352} \times \frac{\frac{7}{5}n-7}{8}$. facit $\frac{7}{2816}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum usque columnis præstari potest: Adeoque valor ipsius DG per hanc Regulam pro libitu produci.

Ad hæc, si BF dicatur x, sitque r latus rectum Ellipseos, et $e = \frac{r}{AB}$: Erit Arcus Ellipticus

$$BG = \sqrt{rx} \text{ in } \overline{1 + \frac{2 - \frac{1}{2}e}{3r}\,x + \frac{-2 + 3e - \frac{5}{8}ee}{5rr}\,x^2 + \frac{+4 - 9e + \frac{23}{4}e^2 - \frac{7}{16}e^3}{7r^3}\,x^3 + \frac{-10 + 30e - \frac{123}{4}e^2 + \frac{91}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^4}{9r^4}\,x^4 + \text{etc.}}$$

Quare, si ambitus totius Ellipseos desideretur; Biseca CB in F, et quære Arcum DG per prius Theorema, et Arcum BG per posterius.

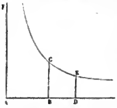
14.

6. Si, vice versa, ex dato Arcu Elliptico DG quæratur Sinus ejus CF; tum dicto CD $= r$, $\frac{\overline{CB}^2}{CD} = c$, et Arcu illo DG $= z$; erit

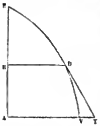
$$\begin{array}{l} CF = z - \frac{1}{6cc} z^3 - \frac{1}{10rc^3} z^5 - \frac{1}{14rrc^4} z^7 - \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\quad + \frac{13}{120c^4} \quad + \frac{71}{420rc^5} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{493}{5040c^6}. \end{array}$$

Quæ autem de Ellipsi dicta sunt omnia, facile accomodantur ad Hyperbolam; mutatis tantum signis ipsorum c et e, ubi sunt imparium dimensionum.

7. Præterea, si sit CE Hyperbola, cujus Asymptoti AD, AF rectum angulum FAD constituant; et ad AD erigantur utcunque perpendicula BC, DE occurrentia Hyperbolæ in C et E; et AB dicatur a, BC b, et Area BCED z; Erit BD $= \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5} + \text{etc.}$ Ubi coefficientium Denominatores prodeunt multiplicando terminos hujus Arithmeticæ Progressionis, 1, 2, 3, 4, 5, etc. in se continuo. Et hinc ex Logarithmo dato potest Numerus ei competens inveniri.



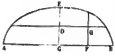
8. Esto VDE Quadratrix, cujus vertex est V; existente A centro, et AE semidiametro Circuli ad quem aptatur, et angulo VAE recto: Demissoque ad AE perpendiculo quovis DB, et acta Quadratricis Tangente DT occurrente axi ejus AV in T: Dic AV $= a$, et AB $= x$; Eritque DB $= a - \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5} - \text{etc.}$ Et VT $= \frac{xx}{3a} + \frac{x^4}{15a^3} + \frac{2x^6}{189a^5} + \text{etc.}$ Et Area AVDB $= ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5} - \text{etc.}$ Et Arcus VD $= x + \frac{2x^3}{27aa} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6} + \text{etc.}$



Unde vicissim, ex dato BD, vel VT, aut Area AVDB, arcuve VD, per Resolutionem affectarum æquationum erui potest x seu AB.

9. Esto denique AEB Sphæroides revolutione Ellipseos AEB circa axem AB genita, et secta Planis quatuor, AB per axem transeunte, DG parallelo AB, CDE perpendiculariter bisecante axem, et FG parallelo CE: Sitque recta CB $= a$, CE $= c$, CF $= x$, et FG $= y$: Et Sphæroideos segmentum CDGF,

dictis quatuor Planis comprehensum, erit



$$\begin{array}{l} +2cxy-\frac{x}{3c}y^3-\frac{x}{20c^3}y^5-\frac{x}{56c^5}y^7-\frac{5x}{576c^7}y^9-\text{etc.}\\ -\frac{cx^3}{3aa}-\frac{x^3}{18caa}-\frac{x^3}{40c^3aa}-\frac{5x^3}{336c^5aa}-\text{etc.}\\ -\frac{cx^5}{20a^4}-\frac{x^5}{40ca^4}-\frac{3x^5}{160c^3a^4}-\text{etc.}\\ -\frac{cx^7}{56a^6}-\frac{5x^7}{336ca^6}-\text{etc.}\\ -\frac{5cx^9}{576a^8}-\text{etc.}\\ -\text{etc.} \end{array}$$

Ubi numerales Coefficientes supremorum terminorum $\left(2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{56}, -\frac{5}{576}, \text{etc.}\right)$ in infinitum producuntur, multiplicando primum coefficientem 2 continuo per terminos hujus progressionis $-\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{1\times3}{4\times5}, \frac{3\times5}{6\times7}, \frac{5\times7}{8\times9}, \frac{7\times9}{10\times11}$, etc. Et numerales coefficientes terminorum in unaquaque columna descendentium in infinitum, producuntur multiplicando continuo coefficientem supremi termini, in prima columna, per eandem progressionem; in secunda autem, per terminos hujus $\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{3\times3}{4\times5}, \frac{5\times5}{6\times7}, \frac{7\times7}{8\times9}$, etc. in tertia, per terminos hujus $\frac{3\times1}{2\times3}, \frac{5\times3}{4\times5}, \frac{7\times5}{6\times7}, \frac{9\times7}{8\times9}$, etc. in quarta, per terminos hujus $\frac{5\times1}{2\times3}, \frac{7\times3}{4\times5}, \frac{9\times5}{6\times7}$, etc. in quinta, per terminos hujus $\frac{7\times1}{2\times3}, \frac{9\times3}{4\times5}, \frac{11\times5}{6\times7}$, etc. Et sic in infinitum.

Et eodem modo segmenta aliorum Solidorum designari, et valores eorum aliquando commode per Series quasdam numerales in infinitum produci possunt.

Ex his videre est quantum fines Analyseos per hujusmodi infinitas æquationes ampliantur: Quippe quæ, earum beneficio, ad omnia pene dixerim problemata (si numeralia *Diophanti* et similia excipias) sese extendit. N° L

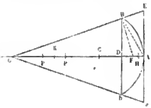
Non tamen omnino universalis evadit, nisi per ulteriores quasdam methodos eliciendi Series infinitas. Sunt enim quædam Problemata, in quibus non liceat ad Series Infinitas per Divisionem vel Extractionem Radicum simplicium affectarumve pervenire. Sed quomodo in istis casibus procedendum sit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere, quæ circa Reductionem Infinitarum Serierum in finitas, ubi rei natura tulerit, exco-

gitavi. Nam parcius scribo, quod hæ speculationes diu mihi fastidio esse cœperunt, adeo ut ab iisdem jam per quinque fere annos abstinuerim.

Unum tamen addam : quod postquam Problema aliquod ad Infinitam Æquationem deducitur, possint inde variæ Approximationes, in usum Mechanicæ, nullo fere negotio formari ; quæ, per alias methodos quæsitæ, multo labore temporisque dispendio constare solent.

Cujus rei exemplo esse possunt Tractatus *Hugenii* aliorumque de Quadratura Circuli. Nam, ut ex data Arcus Chorda A, et dimidii Arcus Chorda B, Arcum illum proxime assequaris; Finge arcum illum esse z, et circuli radium r; juxtaque superiora erit A (nempe duplum Sinus dimidii z) $= z - \frac{z^3}{4 \times 6rr} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120r^4} -$ etc. Et $B = \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^5}{2 \times 16 \times 16 \times 120r^4} -$ etc. Duc jam B in numerum fictitium n, et a producto aufer A, et residui secundum terminum, $\left(\text{nempe } -\frac{nz^3}{2 \times 16 \times 6r} + \frac{z^3}{4 \times 6rr},\right)$ eo ut evanescat, pone $= 0$; indeque emerget $n = 8$; et erit $8B - A = 3z \ast - \frac{3z^5}{64 \times 120r^4} +$ etc. hoc est, $\frac{8B - A}{3} = z$; errore tantum existente $\frac{z^5}{7680r^4} -$ etc. in excessu. Quod est Theorema *Hugenianum*.

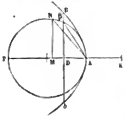
Insuper, si in Arcus Bb sagitta AD indefinite producta quæratur punctum G, a quo actæ rectæ GB, Gb, abscindant Tangentem Ee quam proxime æqualem Arcui isti : Esto Circuli centrum C, Diameter AK $= d$, et sagitta AD $= x$: Et erit DB $(= \sqrt{dx - xx}) = d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}} -$ etc. Et AE $=$ AB $= d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}$ etc. Et AE $-$ DB : AD :: AE : AG. Quare AG $= \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12xx}{175d} -$ vel $+$ etc. Finge ergo AG $= \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x$: et vicissim erit DG $\left(\frac{3}{2}d - \frac{6}{5}x\right)$: DB :: DA : AE $-$ DB. Quare AE $-$ DB $= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}} +$ etc. Adde DB; et prodit AE $= d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}}$



$\frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}}$ + etc. Hoc aufer de valore ipsius AE supra habito, et restabit error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}}$ + vel − etc. Quare in AG cape AH quintam partem DA, et KG = HC, et actæ GBE, G*be* abscindent Tangentem E*e* quam proxime æqualem Arcui BA*b*; errore tantum existente [1] $\frac{16x^3}{525d^3}\sqrt{dx}$ + vel − etc. multo minore scilicet quam in Theoremate *Hugenii*. Quod si fiat 7AK : 3AH :: DH : *n*; et capiatur KG = CH − *n*, erit error adhuc multo minor.

Atque ita, si Circuli segmentum aliquod BA*b* per Mechanicam designandum esset : Primo reducerem Aream istam in Infinitam Seriem, puta hanc $BbA = \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{36d^{\frac{5}{2}}}$ − etc. Dein quærerem constructiones Mechanicas quibus hanc Seriem proxime assequerer; cujusmodi sunt hæ. Age rectam AB, et erit segmentum $BbA = \frac{2}{3}\overline{AB + BD} \times \frac{4}{5}AD$ proxime : existente scilicet errore tantum $\frac{x^3}{70d^3}\sqrt{dx}$ + etc. in defectu : Vel proximius, erit segmentum illud (bisecto AD in F, et acta recta BF) $= \frac{4BF + AB}{15} \times 4AD$; existente errore solummodo $\frac{x^3}{560d^3}\sqrt{dx}$ + etc.; qui semper minor erit quam $\frac{1}{1500}$ totius segmenti, etiamsi segmentum illud ad usque semicirculum augeatur.

Sic et in Ellipsi BA*b* [*Vid. Fig. præcedent.*] cujus vertex A, axis alteruter AK, et latus rectum AP; cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19AK - 21AP}{10AK} \times AD$. In Hyperbola vero, cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19AK + 21AP}{10AK} \times AD$. Et acta recta GBE abscindet tangentem AE quam proxime æqualem Arcui Elliptico vel Hyperbolico AB, dummodo Arcus ille non sit nimis magnus.



Et pro Area Segmenti Hyperbolici B*b*A :

[1] $\left[\frac{2 \times 16x^3}{525d^3}\sqrt{dx}.\right]$ Correction.

in DP cape $MD = \frac{3\overline{AD}^2}{4AK}$, et ad D et M erige perpendicula $D\beta$, MM occurrentia semicirculo super Diametro AP descripto; Eritque $\frac{4AN + A\beta}{15} \times 4AD = BbA$ proxime : Vel proximius, erit $\frac{21AN + 4A\beta}{75} \times 4AD = BbA$; si modo capiatur $DM = \frac{5\overline{AD}^2}{7AK}$.

Tuus, etc.

Cantabrigiæ
Junii 13. 1676.

Is. Newton.

N° LI. *Epistola D.* Leibnitii *ad D.* Oldenburgum, 27 Augusti 1676 *data, cum D.* Newtono *communicanda.*

Clarissimo Viro, D. Henrico Oldenburgo, Godefredus Guilielmus Leibnitius.

Literæ tuæ, die 26 *Julii* datæ, plura ac memorabiliora circa rem Analyticam continent, quam multa volumina spissa de his rebus edita. Quare tibi pariter ac Clarissimis Viris *Newtono* ac *Collinio* gratias ago, qui nos participes tot meditationum egregiarum esse voluistis.

Inventa *Newtoni* ejus ingenio digna sunt, quod ex Opticis Experimentis et Tubo Catadioptrico abunde eluxit.

Ejusque methodus inveniendi Radices Æquationum et Areas Figurarum per Series Infinitas, prorsus differt a mea : Ut mirari libeat diversitatem itinerum per quæ eodem pertingere licet.

Mercator Figuras Rationales, seu in quibus Ordinatarum valor ex datis Abscissis rationaliter exprimi potest, (ut scilicet indeterminata Quantitas in vinculum non ingrediatur), quadravit; et ad Infinitas Series reducere docuit, per Divisiones. *Newtonus* autem, per Radicum Extractiones. Mea Methodus Corollarium est tantum doctrinæ generalis de *Transformationibus;* cujus ope Figura proposita quælibet, quacunque Æquatione explicabilis, transmutatur in aliam Analyticam æquipollentem; talem ut, in ejus Æquatione, ordinatæ dimensio non ascendat ultra Cubum aut Quadratum, aut etiam Simplicem Dignitatem seu Infimum gradum. Ita fiet ut quælibet Figura, vel per Extractionem Radicis Cubicæ vel Quadraticæ, *Newtoni*

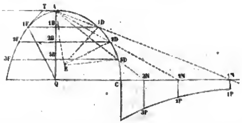
more; vel etiam, Methodo *Mercatoris*, per simplicem Divisionem; ad Series Infinitas reduci queat.

Ego vero ex his Transmutationibus simplicissimam ad rem præsentem delegi. Per quam scilicet * unaquæque Figura transformatur in aliam æquipollentem rationalem; in cujus æquatione, Ordinata in nullam prorsus ascendit Potestatem : Ac proinde sola *Mercatoris* Divisione per Infinitam Seriem exprimi potest.

Ipsa porro * generalis Transmutationum methodus, mihi inter potissima Analyseos censenda videtur. Neque enim tantum ad Series Infinitas, et ad Approximationes; sed et ad solutiones Geometricas, aliaque innumera vix alioqui tractabilia inservit. Ejus vero fundamentum vobis candide libereque scribo; persuasus quæ apud vos habentur præclara, mihi quoque non denegatum iri.

Transformationis fundamentum hoc est : Ut figura proposita rectis innumeris utcunque, modo secundum aliquam regulam sive legem ductis, resolvatur in partes; quæ partes, aut aliæ ipsis æquales, alio situ aliave forma reconjunctæ, aliam componant figuram priori æquipollentem seu ejusdem Areæ, etsi alia longe figura constantem. Unde ad Quadraturas absolutas, vel hypotheticas Geometricas, vel serie infinita expressas Arithmeticas, jamjam multis modis perveniri potest.

Ut intelligatur; Sit Figura AQCDA. Ea, ductis rectis BD parallelis, resolvi potest in Trapezia 1B 2D, 2B 3D, etc. Sed, ductis rectis convergentibus ED, resolvi potest in Triangula E 1D 2D, E 2D 3D, etc.



Si jam alia sit Curva A 1F 2F 3F, cujus Trapezia 1B 2F, 2B 3F sint Triangulis E 1D 2D, E 2D 3D ordine respondentibus æqualia, tota figura AE 3D 2D 1DA, toti figuræ A 1F 2F 3F 3BA erit æqualis.

* Hic modus transmutandi figuras Curvilineas in alias ipsis æquales, ejusdem est generis cum Transmutationibus *Barrovianis* et *Gregorianis*. Et Conicæ Sectiones hac Methodo semper

Quinetiam, Trapezia Trapeziis conferendo, fieri potest ut 1N 2P, vel quod eodem redit, Rectangulum 1N 2P, sit æquale Trapezio respondenti 1B 2D, sive Rectangulo 1B 2D; tametsi recta 1N 1P non sit æqualis rectæ 1B 1D, modo sit 1N 2E ad 1B 2B ut 1B 1D ad 1N 1P; quod infinitis modis fieri potest.

Quæ omnia talia sunt ut cuivis statim ordine progredienti, ipsa natura duce, in mentem veniant; contineantque Indivisibilium Methodum generalissime conceptam, nec (quod sciam) hactenus satis universaliter explicatam. Non tantum enim Parallelæ et Convergentes, sed et aliæ quæcunque certa lege ductæ, rectæ vel curvæ, adhiberi possunt ad Resolutionem. Quanta autem et quam abstrusa hinc duci possint, judicabit qui methodi universalitatem animo erit complexus. Certum enim est omnes Quadraturas hactenus notas, absolutas vel hypotheticas, nonnisi exigua ejus specimina esse.

Sed nunc quidem suffecerit applicationem ostendere ad id de quo agitur; Series scilicet infinitas, et modum Transformandi figuram datam in aliam æquipollentem rationalem, *Mercatoris* Methodo tractandam.

AQCA sit Quadrans Circuli : Radius $AQ = r$: Abscissa A 1B $= x$: Ordinata 1B 1D $= y$; Æquatio pro Circulo $2rx - x^2 = y^2$. Ducatur recta A 1D : producaturque donec ipsi QC etiam productæ occurrat in 1N : Et Q 1N vocetur z. Et** erit A 1B seu $x = \frac{2r^3}{r^2+z^2}$: Et 1B 1D sive $y = \frac{2zr^2}{r^2+z^2}$. Eodem modo, ductâ A 2D 2N, si Q 2N $= z - \beta$ (posita scilicet 1N 2N $= \beta$) erit A 2B $= \frac{2r^3}{r^2+z^2-2z\beta+\beta^2}$: et A 2B $-$ A 1B, sive recta 1B 2B, erit $\frac{2r^3}{r^2+z^2-2z\beta+\beta^2} - \frac{2r^3}{r^2+z^2}$. Sive, posita β infinite parva, (post destructiones et divisiones) erit 1B 2B $= \frac{4r^3z\beta}{\overline{r^2+z^2}|^2}$. Habita ergo recta 1B 1D, et recta 1B 2B, habebitur valor Rectanguli 1D 2B. multiplicatis eorum valoribus in se invicem; habebitur inquam $\frac{8r^5z^2\beta}{\overline{r^2+z^2}|^3}$ pro valore Rectanguli 1D 2B.

---

ad Series infinitas reduci possunt per divisiones. Generalis tamen non est : Nam si Curva sit secundi generis, incidetur in æquationem quadraticam; si tertii generis, in cubicam, si quarti, in quadrato-quadraticam, si quinti, in quadrato-cubicam, etc. præterquam in casibus quibusdam valde particularibus. Per extrationes vero Radicum Problemata facilius solvuntur absque Transmutationibus.

** *N. B. D. Leibnitius* hanc Methodum vulgari more prolixius hic exponit, quam Analysis ejus nova paucis exhibere potuisset, ideoque Analysin illam novam nondum invenerat.

Sit jam Curvæ 1P 2P 3P, etc. natura pro arbitrio assumpta talis, ut Ordinata ejus 1N 1P (ex data abscissa Q 1N sive z) sit $\frac{8r^4z^2}{\overline{r^2+z^2}|^3}$. Ideo, quoniam 1N 2N $= \beta$, erit rectangulum 1P 2N, etiam $\frac{8r^4z^2\beta}{\overline{r^2+z^2}|^3}$. Ac proinde æquale Rectangulo 1D 2B, et spatium 1P 1N 3N 3P 2P 1P æquale spatio Circulari respondenti 1D 1B 3B 3D 2D 1D. Est autem quælibet Ordinata NP rationalis, ex data abscissa QN; quia, positâ QN $= z$, Ordinata NP est $\frac{8r^4z^2}{\overline{r^2+z^2}|^3}$, sive $\frac{8r^4z^2}{r^6+3r^4z^2-3r^2z^4+z^6}$. Ergo ipsa per Infinitam Seriem Integrorum exprimi potest, Dividendo. Et Spatium talibus Ordinatis comprehensum, æquipollens Circulari, infinita Serie numerorum Rationalium, Methodo *Mercatoris* quadrari potest. Quod cum facillimum sit facere, hic omitto. Neque enim elegantiæ suæ, sed Methodi Generalis explicandæ causa, hoc exemplum assumpsi.

Ita si quis loco Circuli mihi dedisset Curvam, in qua Ordinata ascendisset ad gradum Cubicum, potuissem eam reducere ad Curvam, in qua Ordinata non assurrexisset ultra Quadratum, vel etiam ne quidem ad Quadratum.

Itaque semper, sive Extractionibus Radicum *Newtonianis* (gradus cujuslibet dati) vel Divisionibus *Mercatoris*, poterit cujuslibet Figuræ spatium inveniri, interventu alterius æquipollentis. Multum autem ad Simplicitatem interest quid eligas.

Omnium vero possibilium Circuli, et Sectoris Conici Centrum habentis cujuslibet, per Series Infinitas quadraturarum, simplicissimam hanc esse dicere ausim quam nunc subjicio.

Sit QA 1F [*Vid. Fig. præcedent.*] Sector, duabus rectis in centro Q con- Nº LII.
currentibus et Curva Conica A 1F, ad Verticem A sive Axis extremum perveniente, comprehensus. Tangenti Verticis AT occurrat Tangens 1FT. Ipsum AT vocemus t; et Rectangulum sub Semi-latere Recto in Semi-latus Transversum sit Unitas. Erit * Sector Hyperbolæ, Circuli vel Ellipseos, per Semi-latus Transversum divisus, $= \frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7}$, etc. Signo ambiguo $\pm$ valente $+$ in Hyperbola, $-$ in Circulo vel Ellipsi. Unde, posito Quadrato Circumscripto 1, erit Circulus $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, etc. Quæ expressio, jam Triennio abhinc et ultra a me communicata amicis, haud dubie omnium possibilium simplicissima est maximeque afficiens mentem.

* Vid. pag. 25, lin. 10, et p. 41, lin. 8 ⁴.

[1] Id. est pag. 79, l. 17, et p. 95, lin. 1.

Unde duco Harmoniam sequentem *;

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+\frac{1}{48}+\frac{1}{63}+\frac{1}{80}+\frac{1}{99}+\frac{1}{120}, \text{ etc.} = \frac{3}{4},$$

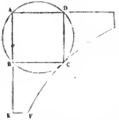
$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{63} \quad \frac{1}{99} \quad \text{etc.} = \frac{2}{4},$$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{48} \quad \frac{1}{80} \quad \frac{1}{120}, \text{ etc.} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{99} \quad \text{etc.},$$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{48} \quad \frac{1}{120}, \text{ etc.}$$

Ubi $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$, etc. exprimit Aream Circuli ABCD, et $\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{120}$, etc. aream Hyperbolæ æquilateræ BCEF, cum sit BC dupla ipsius EF, et quadratum inscriptum $=\frac{1}{4}$. Numeri 3, 8, 15, 24, etc. sunt Quadrati Unitate minuti.



Vicissim, † ex Seriebus Regressuum pro Hyperbola hanc inveni. Si sit numerus aliquis Unitate minor $1-m$, ejusque Logarithmus Hyperbolicus l. Erit $m=\frac{l}{1}-\frac{l^2}{1\times2}+\frac{l^3}{1\times2\times3}-\frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ etc. Si numerus sit major Unitate, ut $1+n$; tunc pro eo inveniendo mihi etiam † prodiit Regula, quæ in *Newtoni* Epistola expressa est; scilicet erit $n=\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1\times2}+\frac{l^3}{1\times2\times3}+\frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ etc. Prior tamen celerius appropinquat. Ideoque efficio ut ea possim uti, etiam cum major est Unitate numerus $1+n$. Nam idem est Logarithmus pro $1+n$ et pro $\frac{1}{1+n}$. Unde, si $1+n$ sit major Unitate, erit $\frac{1}{1+n}$ minor unitate. Fiat ergo $1-m = \frac{1}{1+n}$, ac inventa m, habebitur et $1+n$ numerus quæsitus.

Quod regressum ex Arcubus attinet, † incideram ego directe in Regulam, quæ ex dato Arcu Sinum Complementi exhibet. Nempe, Sinus Comple-

* Vide Acta Lipsica *Feb.* 1682.

† *N. B.* Methodum perveniendi ad has Series *Leibnitius* a *Newtono* jam modo acceperat, idque ex ipsius rogatu. Imo Series ipsas a *Newtono* una cum Methodo perveniendi ad easdem jam modo acceperat, et pro Hyperbola signum tantum mutavit; pro Circulo Sinum Versum a *Newtono* acceptum subduxit a Radio, ut haberet Sinum complementi.

menti $= 1 - \frac{a^2}{1 \times 2} + \frac{a^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ etc. Sed postea quoque deprehendi ex ea, illam nobis communicatam pro inveniendo Sinu Recto, qui est $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ etc., posse demonstrari. Quod tribus verbis sic fit. Summa Sinuum Complementi ad Arcum, seu omnium $1 - \frac{a^2}{1 \times 2} + \frac{a^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ etc. est $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ etc. Porro, Summa Sinuum Complementi ad Arcum (seu Arcui in locis debitis insistentium) æquatur Sinui Recto ducto in Radium, ut notum est Geometris; id est, æquatur ipsi Sinui Recto; quia Radius hic est Unitas. Ergo Sinus Rectus $= \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$, etc. Hinc etiam, ex dato Arcu et Radio, sine ulla prorsus aliorum notitia, haberi potest Area Segmenti Circularis duplicati : quæ est $\frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} - \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{a^7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$ etc. Unde optime Segmentorum Tabula ad Gradus et Minuta etc. calculabitur.

Pro Trigonometricis autem operationibus, percommoda mihi videtur hæc expressio : Ut Sinus complementi c ponatur $= 1 - \frac{a^2}{1 \times 2} + \frac{a^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$; quoniam sola, memoria retenta, omnibus casibus et operationibus, directis silicet simul et reciprocis, sufficit; Quod ideo fit, quoniam Æquatio $c = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}$ est plana. Unde si vicissim quæras Arcum ex Sinu Complementi, radix extrahi potest; adeoque fiet Arcus $a = \sqrt{6 - \sqrt{24c + 12}}$ exacte satis ad usum eorum qui in itineribus Tabularum commoditate carent; quia error æquationis non est $\frac{a^6}{720}$.

Innumera alia possent dici, quæ his fortasse elegantia et exactitudine non cederent. Sed ego ita sum comparatus ut plerunque, Methodis Generalibus detectis, rem in potestate habere contentus, reliqua libenter aliis relinquam. Neque enim ista omnia magnopere æstimanda sunt, nisi quod artem Inveniendi perficiunt, mentemque excolunt. Si quæ obscuriora videbuntur, ea libenter elucidabo : Et illud quoque explicabo, quomodo hac Methodo Æquationum quoque utcunque Affectarum Radices per Infinitam Seriem dari possint, sine ulla Extractione; quod mirum fortasse videbitur.

Sed desideraverim ut Clarissimus *Newtonus* nonnulla quoque amplius explicet; ut originem Theorematis quod initio ponit : Item Modum quo quantitates p, q, r, in suis Operationibus invenit : Ac denique, Quomodo in Methodo Regressuum se gerat, ut cum ex Logarithmo quærit Numerum. Neque enim explicat quomodo id ex Methodo sua derivetur.

Nondum mihi licuit ejus Literas qua merentur diligentia legere : quoniam tibi e vestigio respondere volui. Unde non satis nunc quidem affirmare ausim, an nonnulla eorum quæ suppressit, ex sola earum lectione consequi possum. Sed optandum tamen foret, ipsum ea potius supplere *Newtonum* : Quia credibile est, non posse eum scribere, quin aliquid semper præclari nos doceat (ut apparet) egregiarum meditationum plenus.

N° LIII Ad alia tuarum literarum venio; quæ Doctissimus *Collinius* communicare gravatus non est. Vellem adjecisset appropinquationis *Gregorianæ* linearis Demonstrationem. Credo tamen aliam haberi simpliciorem, etiam in infinitum euntem; quæ fiat sine ulla Bisectione Anguli, imo, sine supposita Circuli Constructione; solo Rectarum ductu.

Vellem *Gregoriana* omnia conservari. Fuit enim his certe studiis promovendis aptissimus : Cæterum ejus demonstrationi editæ, de Impossibilitate Quadraturæ absolutæ Circuli et Hyperbolæ, multa haud dubie desunt.

De Æquationum Radicibus Surdis Generalibus inveniendis; sive, quod idem est, tollendis Æquationum potestatibus intermediis, multa et ego meditatus sum; et jam Vere anni superioris Specimina *Hugenio* communicaveram Regularum *Cardanicis* similium. Seriem enim habebam ejusmodi Regularum in infinitum euntem; in quibus et *Cardanica* continebatur. Sed ultra gradum Cubicum non erant Generales. Perspexi tamen inde veram Methodum progrediendi longius. Quamquam multis adhuc opus sit artibus, quas excutiendas libenter ingeniosissimo *Tschürnhausio* relinquo; qui hic ad eadem quæ ego habebam Specimina, imo et alia præterea, etiam de suo pervenit.

Ex iis quæ *Collinius* ait de *Gregoriana* Methodo, difficile non fuit nobis certo divinare in quo consistat ejus substantia.

Imaginariarum quantitatum in Realium Radicum expressiones ingredientium sublationem, frustra putem sperari, imo quæri. Neque enim illæ ullo modo vel Calculis vel Constructionibus obsunt : Et veræ Realesque sunt Quantitates, si inter se conjunguntur, ob destructiones virtuales. Quod multis elegantibus Exemplis et Argumentis deprehendi.

Exempli gratia, $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$. Tametsi enim neque ex Binomio $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$, neque ex Binomio $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ radix extrahetur; nec proinde sic destruetur imaginaria $\sqrt{-3}$: supponenda tamen est destructa esse virtualiter, quod actu appareret si fieri posset Extractio. Alia tamen via hæc summa reperitur esse $\sqrt{6}$. Unde in Cubicis Binomiis ubi realitas ejusmodi formularum (tunc cum Extractio ex singulis Binomiis fieri nequit) ad oculum ostendi non potest; mente tamen intelligitur. Quare frustra

Cartesius aliique expressiones *Cardanicas* pro particularibus habuere. Si quis posset invenire Quadraturam Circuli et ejus Partium, ex data Hyperbolæ et ejus Partium quadratura, is posset eas tollere; modo in ipsam Quadraturam imaginariæ illæ rursus ingrediantur.

Cæterum ex illis quas habeo meditationibus circa Radices æquationum irrationales, necessario sequitur res satis Paradoxa : Scilicet omnes Æquationes gradus Octavi, Noni, Decimi, posse ad gradum Septimum reduci. Itaque et omnia Problemata ad Decimum gradum usque occurrentia possunt ad Septimum deprimi.

Horribiles Calculi subeundi erunt illi qui in hoc Argumentum velut per vim irrumpet; sed facillimi ipsi qui ante meditabitur : cum, ut prævideo, ipsa natura rei ducat ad compendia quædam, per quæ spes est Calculi magnam partem abscindi; remque elegantibus artificiis, Ingenii potius vi quam Calculi labore, transigi posse.

Sed si quis laborem non subterfugeret, eum docere possum Methodum Analyticam generalem infallibilem, per quam omnium Æquationum radices generales invenire liceret.

Verum meliora illis proponerem agenda qui Calculo delectarentur. Consilium enim habeo Tabularum Analyticarum, quæ non minoris futuræ essent usus in Analysi, quam Tabulæ Sinuum in Geometria Practica; imo, arbitror, qui paulum in iis calculandis versatus sit, eum progressiones reperturum in infinitum, quarum ope magna Tabulæ pars sine labore continuari possit. Nihil est quod norim in tota Analysi momenti majoris. Nam in his Tabulis pleraque Problemata statim soluta haberentur, aut levi opera possint inde deduci.

Pendet negotium ex re longe majore, Arte scilicet Combinatoria generali ac vera. Cujus vim ac potestatem nescio an quisquam hactenus sit consequutus. Ea vero nihil differt ab Analysi illa suprema, ad cujus intima, quantum judicare possum, *Cartesius* non pervenit. Est enim ad eam constituendam opus Alphabeto Cogitationum humanarum. Et ad inventionem ejus Alphabeti, opus est Analysi Axiomatum. Sed non miror ista nemini satis considerata : Quia plerumque facilia negligimus; et multa, quæ clara videntur, assumimus. Quod quamdiu faciemus, nunquam ad illud perveniemus, quod mihi videtur in rebus intellectualibus summum; nec genus Calculi etiam non-Mathematicis accommodati obtinebimus.

Optarim Cl. *Pellium* generalia sua Meditata, et illud speciatim quod memoras *Cribrum Eratosthenis*, non supprimere. Nam et si omnia forte quæ destinarat non absolverit; meditata tamen ipsa et Consilia egregiorum Vi-

rorum non perire publici interest. Utilia quoque futura sunt quæ de Sinuum Tabula ad Æquationes accommodanda habet. Item de Limitibus et Radicibus.

Quod dicere videmini, plerasque difficultates (exceptis Problematibus *Diophantæis*) ad Series infinitas reduci; id mihi non videtur. Sunt enim multa usque adeo mira et implexa, ut neque ab Æquationibus pendeant, neque ex Quadraturis. Qualia sunt (ex multis aliis) Problemata* methodi Tangentium inversæ; quæ etiam *Cartesius* in potestate non esse fassus est.

In tomo 3° Epistolarum, una habetur ad *Beaunium;* in qua, ad propositas a *Beaunio*, Curvas quasdam invenire conatur; quarum una est hujus[1] Naturæ, ut intervallum, inter Tangentem ad (axem) directricem usque productam et Ordinatim-applicatam ex Curva ad directricem, sit semper idem; recta scilicet constans. Hanc Curvam nec *Cartesius* nec *Beaunius* nec quisquam alius (quod sciam) invenit. Ego vero qua primum die, imo hora, cœpi quærere, statim certa Analysi solvi. Fateor tamen nondum me quicquid in hoc genere desiderari potest consecutum : quamquam maximi momenti esse sciam. Ac de his quidem nunc satis.

Ego id agere constitui, ubi primum otium nactus ero, ut rem omnem Mechanicam reducam ad puram Geometriam; problemataque circa Elateria, et Aquas, et Pendula, et Projecta, et Solidorum Resistentiam, et Frictiones, etc. definiam. Quæ hactenus attigit nemo. Credo autem rem omnem nunc esse in potestate; ex quo circa Regulas Motuum mihi penitus perfectis demonstrationibus satisfeci; neque quicquam amplius in eo genere desidero. Tota autem res, quod mireris, pendet ex Axiomate Metaphysico pulcherrimo; quod non minoris est momenti circa Motum, quam hoc, *totum esse majus parte,* circa magnitudinem.

De Centro-baricis quoque singularem quendam aditum reperi ad novas ac plane a prioribus diversas contemplationes, in Geometria pariter ac Mechanica magno usui futuras. Hæc ubi (Deo volente) absolvero, reliquum temporis, quod scilicet Philosophicis meditationibus destinare fas erit, Naturæ indagationi debeo.

Tschürnhausius proximo Tabellione scribet.

---

* Si æquationes differentiales D. *Leibnitio* jam innotuissent, haud dixisset Problemata Methodi Tangentium inversæ ab Æquationibus non pendere.

[1] Les deux éditions de 1712 et de 1722 portent *Ludus Naturæ :* c'est une erreur de transcription, qui a été signalée par Leibnitz dans sa lettre à l'abbé Conti, en date du 9 Avril 1716. [F. L.]

Excerpta ex Epistola D. Ehrenfried de Tschürnhause *ad D.* Oldenburgum, N° 13.
Parisiis 1° Septemb. 1676 *data, cujus extat exemplar manu D.* Collius *descriptum.*

Expectabam cum desiderio responsum, cum aliquot abhinc mensibus ad te literas meas transmiseram; sed nec ex modo datis colligere licet has receptas fuisse. Interim admodum oblectatus fui, hisce conspectis quæ ad D. *Leibnitium* exarasti; maximeque me tibi devinxisti, quod me participem volueris facere tam ingeniosarum inventionum, et promotionis Geometriæ tam pulchræ quam utilis. Statim cursim eas pervolvi, ut viderem num forte inter hasce Series Infinitas existeret [1] ea qua ingeniosissimus D. *Leibnitius* Circulum, imo quamvis sectionem Conicam (centro in finita distantia gaudentem) quadravit, tali ratione ut mihi persuadeam simpliciorem viam, nec quoad linearem constructionem, nec numeralem expressionem, nunquam visum iri; quique hisce porro insistens, generalem adinvenit Methodum Figuram quamvis datam in talem rationalem transmutandi, quæ per solum inventum (admodum præstans meo judicio) D. *Mercatoris*, ad Seriem infinitam posset reduci; sed hac de materia, cum ipse non ita pridem mentem suam declaravit, non opus est ut prolixior sim. Verum ut ad specimina perquam ingeniosa D. *Newtoni* revertar; hæc non potuere non mihi placere, tam ob utilitatem qua se tam late ad quarumvis quantitatum dimensiones, ac alia difficilia enodanda in Mathematicis extendunt, quam ob deductionem harum a fundamentis non minus generalibus quam ingeniosis derivatam: non obstante quod existimem, ad quantitatem quamvis ad infinitam seriem æquipollentem reducendam, fundamenta adhuc dari et simpliciora et universaliora, quam sunt fractionum et irrationalium reductio ad tales Series, ope Divisionis aut Extractionis; quæ mihi tale quid non nisi per accidens præstare videntur: cum hæc successum quoque habeant, licet non adsint fractiones aut irrationales Quantitates. Similia porro* quæ in hac re præstitit eximius ille Geometra *Gregorius*, memoranda certe sunt, et quidem optime famæ ipsius consulturi, qui ipsius relicta Manuscripta luci publicæ ut exponantur operam navabunt.

* Annon D. *Tschurnhause* viderat Excerpta ex *Gregorii* Epistolis cum D. *Leibnitio* communicata, ubi habetur Series *Gregorii* quam *Leibnitio* hic tribuit? Vide pag. 46 et 47 [1].

[1] Id est p. 99 et 100.

N° LV. *Epistola D.* Newtoni *posterior, ad D.* Oldenburgum, *Octob.* 24 1676 *data, cum D.* Leibnitio *communicanda.*

Vir dignissime,

Quanta cum voluptate legi Epistolas Clarissimorum Virorum D. *Leibnitii* et D. *Tschürnhausii* vix dixerim.

Perelegans sane est *Leibnitii* methodus perveniendi ad Series Convergentes: et satis ostendisset ingenium Authoris, etsi nihil aliud scripsisset. Sed quæ alibi per Epistolam sparsit, suo nomine dignissima, efficiunt etiam ut ab eo speremus maxima. Diversitas modorum quibus eodem tenditur eo magis placuit, quod mihi tres Methodi perveniendi ad ejusmodi Series innotuerant; adeo ut novam nobiscum communicandam vix expectarem.

Unam e meis prius descripsi: jam addo aliam; illam scilicet qua primùm incidi in has Series. Nam incidi in eas antequam scirem Divisiones et Extractiones Radicum quibus jam utor. Et hujus explicatione pandendum est fundamentum Theorematis sub initio Epistolæ prioris positi, quod D. *Leibnitius* a me desiderat.

Sub initio studiorum meorum Mathematicorum, ubi incideram in* opera Celeberrimi *Wallisii* nostri, considerando Series quarum intercalatione ipse exhibet Aream Circuli et Hyperbolæ; utpote quod in Serie Curvarum, quarum Basis seu Axis communis sit x, et Ordinatim-applicatæ $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{5}{2}}$. etc. si Areæ alternarum quæ sunt x, $x-\frac{1}{3}x^3$, $x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$, $x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$ etc. interpolari possent, haberemus Areas intermediarum; quarum prima $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$ est Circulus: ad has interpolandas notabam, quod in omnibus, primus terminus esset x, quodque secundi termini $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, etc. essent in Arithmetica progressione; et proinde quod duo primi termini Serierum intercalandarum deberent esse $x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, $x-\frac{\frac{3}{2}x^3}{3}$, $x-\frac{\frac{5}{2}x^3}{3}$, etc.

Ad reliquas intercalandas considerabam, quod Denominatores 1, 3, 5,

* Vide D. *Wallisii* Arithmeticam infinitorum, Prop. 113, 121, etc. Ejusque Algebram, Cap. 82.

7, etc. erant in Arithmetica progressione; adeoque solæ Numeratorum Coefficientes numerales essent investigandæ. Hæ autem in alternis datis Areis erant figuræ potestatum numeri undenarii; nempe 11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4. Hoc est, primo 1; deinde 1, 1; tertio 1, 2, 1; quarto 1, 3, 3, 1; quinto 1, 4, 6, 4, 1. etc.

Quærebam itaque, quomodo in his Seriebus, ex datis duabus primis figuris, reliquæ derivari possent. Et inveni quod posita secunda figura m, reliquæ producerentur per continuam multiplicationem terminorum hujus Seriei, $\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5}$ etc.

Exempli gratia; Sit (terminus secundus) $m = 4$; et erit $4 \times \frac{m-1}{2}$, hoc est 6, tertius terminus; et $6 \times \frac{m-2}{3}$, hoc est 4, quartus; et $4 \times \frac{m-3}{4}$, hoc est 1, quintus; et $1 - \frac{m-4}{5}$, hoc est 0, sextus; quo series in hoc casu terminatur.

Hanc Regulam itaque applicui ad Series interserendas. Et cum, pro Circulo, secundus terminus esset $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, posui $m = \frac{1}{2}$; et prodierunt termini $\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2}$ sive $-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3}$ sive $+\frac{1}{16}$; $+\frac{1}{16} \times \frac{\frac{1}{2}-3}{4}$ sive $-\frac{5}{128}$; et sic in infinitum. Unde cognovi desideratam Aream segmenti Circularis esse

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} \text{ etc.}$$

Et eadem ratione prodierunt etiam interserendæ areæ reliquarum Curvarum: ut et area Hyperbolæ et cæterarum alternarum in hac Serie $\overline{1+xx}|^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{1}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1+xx}|^{\frac{3}{2}}$, etc.

Et eadem est ratio intercalandi alias Series, idque per intervalla duorum pluriumve terminorum simul deficientium.

Hic fuit primus meus ingressus in has meditationes: qui e memoria sane exciderat, nisi oculos in adversaria quædam ante paucas septimanas retulissem.

Ubi vero hæc didiceram, mox considerabam terminos $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{6}{2}}$, etc. hoc est, 1, $1-xx$, $1-2xx+x^4$, $1-3xx+3x^4$

16.

$-x^6$, etc. eodem modo interpolari posse ac areas ab ipsis generatas: et ad hoc nihil aliud requiri quam omissionem denominatorum 1, 3, 5, 7, etc. in terminis exprimentibus areas; hoc est, coefficientes terminorum quantitatis intercalandæ $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, vel $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{3}}$, vel generaliter $\overline{1-xx}|^{m}$, prodire per continuam multiplicationem terminorum hujus Seriei $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ etc.

Adeoque (exempli gratia) $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, valeret $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ etc. Et $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$ valeret $1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6$ etc. Et $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{3}}$ valeret $1 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6$ etc.

Sic itaque innotuit mihi generalis Reductio Radicalium in infinitas Series, per Regulam quam posui initio Epistolæ prioris, antequam scirem Extractiones Radicum.

Sed, hac cognita, non potuit altera me diu latere. Nam ut probarem has operationes, multiplicavi $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ etc. in se; et factum est $1 - xx$, terminis reliquis in infinitum evanescentibus per continuationem seriei. Atque ita $1 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6$ etc. bis in se ductum produxit $1 - xx$. Quod, ut certa fuerit harum conclusionum Demonstratio, sic me manuduxit ad tentandum e converso, num hæ Series, quas sic constitit esse Radices quantitatis $1 - xx$, non possent inde extrahi more Arithmetico. Et res bene successit. Operationis forma in Quadraticis Radicibus hæc erat.

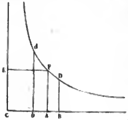
$$
\begin{array}{l}
1 - xx \left(1 - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 \text{ etc.}\right. \\
\underline{1} \\
0 - xx \\
\quad \underline{-xx + \frac{1}{4}x^4} \\
\qquad -\frac{1}{4}x^4 \\
\qquad \underline{-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{64}x^8} \\
\qquad\qquad -\frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{64}x^8
\end{array}
$$

His perspectis neglexi penitus interpolationem Serierum; et has opera-

tiones tanquam fundamenta magis genuina solummodo adhibui. Nec latuit Reductio per Divisionem; res utique facilior.

Sed et Resolutionem affectarum Æquationum mox agressus sum, eamque obtinui. Unde simul Ordinatim-applicatæ, Segmenta axium, aliæque quælibet Rectæ, ex Areis Curvarum vel Arcubus datis innotuere. Nam regressio ad hæc nihil indigebat præter Resolutionem Æquationum, quibus Areæ vel Arcus ex datis rectis ılabantur.

Eo tempore Pestis ingruens [*quæ contigit annis* 1665, 1666], coegit me hinc fugere, et alia cogitare. Addidi tamen subinde conditurum quandam Logarithmorum ex Area Hyperbolæ, quam hic subjungo. N° LVI



Sit dFD Hyperbola, cujus Centrum C, Vertex F, et Quadratum interjectum CAFE = 1. In AC cape AB, Ab hinc inde $= \frac{1}{10}$ seu 0.1: Et. erectis perpendiculis BD, bd ad Hyperbolam terminatis, erit semi-summa spatiorum AD et $Ad = 0.1 + \frac{0.001}{3} + \frac{0.00001}{5} + \frac{0.0000001}{7}$ etc. et semi-differentia $= \frac{0.01}{2} + \frac{0.0001}{4} + \frac{0.000001}{6} + \frac{0.00000001}{8}$ etc. Quæ reductæ sic se habent,

0.1000000000000	0.0050000000000
3333333333	250000000
20000000	1666666
142857	12500
1111	100
9	1
0.1003353477310	0.0050251679267

Horum summa 0.1053605156577 est Ad; et differentia 0.0953101798043 est AD. Et eadem ratione, positis AB, Ab hinc inde = 0.2, obtinebitur $Ad = 0.2231435513142$, et AD = 0.1823215567939. Habitis sic Logarithmis Hyperbolicis numerorum quatuor decimalium 0.8, 0.9, 1.1, et 1.2; cum sit $\frac{1.2}{0.8} \times \frac{1.2}{0.9} = 2$; et 0.8 et 0.9, sint minores Unitate: adde Logarithmos eorum ad duplum Logarithmi 1.2, et habebis 0.6931471805597 Logarithmum Hyperbolicum numeri 2. Cujus triplo adde Log. 0.8 (siquidem sit $\frac{2 \times 2 \times 2}{0.8} = 10$), et habebis 2.3025850929933 Logarithmum numeri 10: Indeque per Additionem simul prodeunt Logarithmi numerorum 9

et 11 : Adeoque omnium Primorum horum 2, 3, 5, 11, Logarithmi in promptu sunt. Insuper, ex sola depressione numerorum superioris computi per loca Decimalia et Additione, obtinentur Logarithmi Decimalium 0.98, 0.99, 1.01, 1.02; ut et horum 0.998, 0.999, 1.001, 1.002. Et inde per Additionem et Subductionem prodeunt Logarithmi Primorum 7, 13, 17, 37, etc. Qui una cum superioribus, per Logarithmum numeri 10 divisi, evadunt veri Logarithmi in Tabulam inserendi. Sed hos postea propius obtinui.

Pudet dicere ad quot figurarum loca has computationes otiosus eo tempore produxi. Nam tunc sane nimis delectabar inventis hisce. Sed ubi prodiit ingeniosa illa * *Nicolai Mercatoris* Logarithmotechnia (quem suppono sua primum invenisse) cœpi ea minus curare; suspicatus, vel eum nosse Extractionem Radicum æque ac Divisionem Fractionum; vel alios saltem, Divisione patefacta, inventuros reliqua, prius quam ego ætatis essem maturæ ad scribendum.

Nº LVII. Eo ipso tamen tempore quo liber iste prodiit, communicatum est per amicum D. *Barrow* (tunc Matheseos Professorem *Cantab.*) cum D. *Collinio* †, compendium quoddam Methodi harum Serierum; in quo significaveram Areas et Longitudines Curvarum omnium, et Solidorum superficies et Contenta, ex datis Rectis; et vice versa, ex his datis Rectas determinari posse: et Methodum ibi indicatam illustraveram diversis seriebus.

Suborta deinde inter nos Epistolari consuetudine; D. *Collinius*, Vir in rem Mathematicam promovendam natus, non destitit suggerere ut hæc publici juris facerem. Et ante annos quinque [1671] cum suadentibus amicis consilium ceperam edendi Tractatum de Refractione Lucis, et Coloribus, quem tunc in promptu habebam; cœpi de his Seriebus iterum co-

---

* Mathematici priores invenerunt hoc Theorema, quod *summa terminorum progressionis Geometricæ in infinitum pergentis est ad terminorum primum et maximum, ut hic terminus ad differentiam duorum terminorum primorum.* Idem demonstratur Arithmetice multiplicando extrema et media. Demonstravit *Wallisius* dividendo rectangulum sub mediis per extremum ultimum. Vide *Wallisii* opus Arithmeticum Anno 1657 editum cap. 33 §. 68. Per *Wallisii* divisionem *Mercator* demonstravit (1) Quadraturam Hyperbolæ a D. *Brounker* prius inventam. Et *Gregorius* idem demonstravit Geometrice. Sed horum nemo methodum generalem quadrandi curvas per divisionem invenit. *Mercator* hoc nunquam professus est. *Gregorius* ejusmodi methodum, licet vir acutissimus et literis *Collinii* admonitus, vix tandem invenit. *Newtonus* invenit per interpolationem Serierum, et postea divisionibus et extractionibus radicum ut notioribus usus est.

† Analysin intelligit per Æquationes Infinitas supra impressam, de qua vid pag. 1, 2, 3 [1].

(1) [Et auxit.] Interpolation.

[1] Id est pag. 53 et 54.

gitare; et * Tractatum de iis etiam conscripsi, ut utrumque simul ederem.

Sed, ex occasione Telescopii Catadioptrici, Epistolâ ad te missâ qua breviter explicui conceptus meos de Natura Lucis, inopinatum quiddam effecit ut mei interesse sentirem ad te festinanter scribere de Impressione istius Epistolæ. Et subortæ statim per diversorum Epistolas (Objectionibus aliisque refertas) crebræ interpellationes me prorsus a consilio deterruerunt; et effecerunt ut me arguerem imprudentiæ, quod umbram captando, eatenus perdideram quietem meam, rem prorsus substantialem.

Sub eo tempore *Jacobus Gregorius*, ex unica quadam Serie e meis quam D. *Collinius* ad eum transmiserat, post multam considerationem (ut ad *Collinium* rescripsit) pervenit ad eandem Methodum, et Tractatum de ea reliquit quem speramus ab Amicis ejus editum iri. Siquidem pro ingenio quo pollebat non potuit non adjicere de suo nova multa, quæ rei Mathematicæ interest ut non pereant.

Ipse autem Tractatum meum non penitus absolveram, ubi destiti a proposito; neque in hunc diem mens rediit ad reliqua adjicienda. Deerat quippe pars ea qua decreveram explicare modum solvendi Problemata, quæ ad Quadraturas reduci nequeunt; licet aliquid de Fundamentis ejus posuissem. Cœterum in Tractatu isto, Series Infinitæ non magnam partem obtinebant.

Alia haud pauca congessi, inter quæ erat Methodus ducendi Tangentes, quam solertissimus *Slusius* ante annos duos tresve tecum communicavit; de qua tu (suggerente *Collinio*) rescripsisti eandem * mihi etiam innotuisse. Diversa ratione in eam incidimus. Nam res non eget Demonstratione, prout ego operor. Habito meo Fundamento nemo potuit Tangentes aliter ducere, nisi volens de recta via deviaret.

Quinetiam non hic hæretur ad Æquationes Radicalibus unam vel utramque Indefinitam Quantitatem involventibus utcunque affectas; sed absque aliqua talium Æquationum Reductione (quæ opus plerumque redderet immensum) Tangens confestim ducitur. Et eodem modo se res habet in quæstionibus de Maximis et Minimis; aliisque quibusdam, de quibus jam non loquor.

---

* Hujus Tractatus meminit D. *Collins* in Epistolis duabus supra impressis, pag. 27, 28 [1] (2).

[1] Id est pag. 81, 82.

(2) [Et *Newtonus* in Epist. supra impressa, pag. 83.] Addition.

* Vide Epistolam *Newtoni* supra impressam, pag. 29, 30 [1].

[1] Id est pag. 83, 84.

Fundamentum harum Operationum, satis obvium quidem, (quoniam jam non possum Explicationem ejus prosequi), sic potius celavi † 6 *accdæ* 13 *eff* 7 *i* 3 *l* 9 *n* 4 *o* 4 *qrr* 4 *s* 9 *t* 12 *vx*.

Hoc fundamento conatus sum etiam reddere †† speculationes de Quadratura Curvarum simpliciores; pervenique ad Theoremata quædam generaliora. Et, ut candidè agam, ecce primum Theorema.

N° LVIII. Ad Curvam aliquam sit $dz^{\theta} \times \overline{e + fz^{\eta}}|^{\lambda}$ Ordinatim-applicata, termino abscissæ seu basis z normaliter insistens: ubi literæ d, e, f denotant quaslibet quantitates Datas; et θ, η, λ indices Potestatum sive Dignitatum quantitatum quibus affixæ sunt. Fac $\frac{\theta + 1}{\eta} = r$, $\lambda + r = s$, $\frac{d}{\eta f} \times \overline{e + fz^{\eta}}|^{\lambda + 1} = Q$, et $r\eta - \eta = \varpi$: et Area Curvæ erit Q in $\frac{z^{\varpi}}{s} - \frac{r - 1}{s - 1} \times \frac{eA}{fz^{\eta}} + \frac{r - 2}{s - 2} \times \frac{eB}{fz^{\eta}} - \frac{r - 3}{s - 3} \times \frac{eC}{fz^{\eta}} + \frac{r - 4}{s - 4} \times \frac{eD}{fz^{\eta}}$ etc. literis A, B, C, D. etc. denotantibus terminos proxime antecedentes; nempe A terminum $\frac{z^{\varpi}}{s}$, BB terminum $- \frac{r - 1}{s - 1} \times \frac{eA}{fz^{\eta}}$ etc. Hæc Series, ubi r fractio est vel numerus negativus, continuatur in infinitum; ubi vero r integer est et affirmativus, continuatur ad tot terminos tantum quot sunt Unitates in eodem r; et sic exhibet Geometricam Quadraturam Curvæ. Rem Exemplis illustro.

Exemplum 1. Proponatur Parabola, cujus Ordinatim-applicata sit $\sqrt{az}$. Hæc in formam Regulæ reducta sit $z^{0} \times \overline{0 + az^{1}}|^{\frac{1}{2}}$. Quare $d = 1$, $\theta = 0$, $e = 0$, $f = a$, $\eta = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoque $r = 1$, $s = 1\frac{1}{2}$, $Q = \frac{1}{a} \times az^{\frac{3}{2}}$, $\varpi = 0$.

† Hoc est, *Data Æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire; et vice versa*. Prior pars Problematis solvitur per Regulam Binomii initio Epistolæ superioris *Newtonianæ* traditam et initio hujus demonstratam. Nam si terminus secundus Binomii sit momentum termini primi, terminus secundus Seriei, in quam dignitas Binomii per Regulam illam resolvitur, erit momentum Dignitatis Binomii. Posterior pars Problematis solvitur regrediendo a momentis ad fluentes: quod ubi hæretur fieri solet quadrando figuras; et ubi quadraturas hæretur, extrahendo fluentes per Regulas quatuor, quarum duas *Newtonus* in Epistola priore explicuit, duas alias sub finem hujus Epistolæ literis transpositis occultavit, ut mox dicetur.

†† Hujusmodi Theoremata *Newtono* ante annum 1669 innotuisse patet, per Analysin supra impressam pag. 18, lin. 31 [2], (3), ut et per hanc Epistolam.

[2] Id est pag. 72, lin. 25.

(3) [Et per Epistolam *Collinii* ad *Thomam Strode* 26 Julii 1672 data, pag. 83, lin. 7, 8, 9.] Interpolation.

Et erit Area quæsita $\frac{1}{a} \times az^{\frac{3}{2}}$ in $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$; hoc est, $\frac{2}{3} z \sqrt{az}$. Et sic in genere, si cz^{η} ponatur Ordinatim-applicata, prodibit Area $\frac{c}{\eta + 1} z^{\eta + 1}$.

Exemplum 2. Sit Ordinatim-applicata $\frac{a^4 z}{c^4 - 2cczz + z^4}$. Hæc per Reductionem fit $a^4 z \times \overline{cc - zz}|^{-2}$; vel etiam $a^4 z^{-3} \times \overline{-1 + ccz^{-2}}|^{-2}$. In priori casu est $d = a^4$, $\theta = 1$, $e = cc$, $f = -1$, $\eta = 2$, $\lambda = -2$. Adeoque $r = 1$, $s = -1$, $Q = -\frac{a^4}{2} \times \overline{cc - zz}|^{-1}$, hoc est $-\frac{a^4}{2cc - 2zz}$, $\pi = 0$. Et Area Curvæ Q in $-\frac{z^0}{1}$, id est $= \frac{a^4}{2cc - 2zz}$. In secundo autem casu, est $d = a^4$, $\theta = -3$, $e = -1$, $f = cc$, $\eta = -2$, $\lambda = -2$, $r = 1$, $s = -1$, $Q = -\frac{a^4}{2cc} \times \overline{-1 + ccz^{-2}}|^{-1}$, id est $-\frac{a^4 zz}{2c^4 - 2cczz}$, $\varpi = 0$. Et Area $= Q$ in $-\frac{z^0}{1}$, hoc est $\frac{a^4 zz}{2c^4 - 2cczz}$. Area his casibus diversimode exhibetur, quatenus computatur a diversis finibus, quorum assignatio per hos inventos valores Arearum facilis est.

Exempl. 3. Sit Ordinatim-applicata $\frac{a^5}{z^5}\sqrt{bz + zz}$: hoc est, per Reductionem ad debitam formam; vel $a^5 z^{-\frac{9}{2}} \times \overline{b + z}|^{\frac{1}{2}}$; vel $a^5 z^{-4} \times \overline{1 + bz^{-1}}|^{\frac{1}{2}}$. Et erit, in priori casu, $d = a^5$, $\theta = -\frac{9}{2}$, $e = b$, $f = 1$, $\eta = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoque $r = -\frac{7}{2}$ etc. Quare, cum r non sit numerus affirmativus, procedo ad alterum casum. Hic est $d = a^5$, $\theta = -4$, $e = 1$, $f = b$, $\eta = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoque $r = 3$, $s = 3\frac{1}{2}$, $Q = -\frac{a^5}{b} \times \overline{1 + bz^{-1}}|^{\frac{3}{2}}$, seu $-\frac{a^5 z + a^5 b}{bzz}\sqrt{zz + bz}$, $\pi = -2$. Et Area, Q in $\frac{z^{-1}}{3\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^{-1}}{3\frac{1}{2}b} + \frac{1}{1\frac{1}{2}} \times \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^0}{3\frac{1}{2}bb}$, hoc est $\frac{-30bb + 24bz - 16zz}{105bbzz}$, in $\frac{a^5 z + a^5 b}{bzz}\sqrt{zz + bz}$.

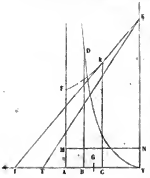
Exempl. 4. Sit denique Ordinatim-applicata $\frac{bz^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{c^3 - 3accz^{\frac{2}{3}} + 3aacz^{\frac{4}{3}} - a^3 zz}}$. Hæc ad formam Regulæ reducta, fit $bz^{\frac{1}{3}} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{-\frac{3}{5}}$. Indeque est $d = b$, $\theta = \frac{1}{3}$, $e = c$, $f = -a$, $\eta = \frac{2}{3}$, $\lambda = -\frac{3}{5}$, $r = 2$, $s = \frac{7}{5}$, $Q = -\frac{3b}{2a}$

$\times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}\Big|^{\frac{2}{5}}$, $\pi = \frac{2}{3}$. Et Area Q $\times \frac{5z^{\frac{1}{3}}}{7} - \frac{5}{2} \times - \frac{5c}{7a}$, id est $- \frac{30abz^{\frac{1}{3}} + 75bc}{28aa}$
$\times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}\Big|^{\frac{2}{5}}$.

Quod si res non successisset in hoc casu, existente r vel fractione vel numero negativo; tunc tentassem alterum casum, purgando terminum $- az^{\frac{2}{3}}$ in Ordinatim-applicata a Coefficiente $z^{\frac{2}{3}}$; hoc est reducendo Ordinatim-applicatam ad hanc formam, $bz^{-\frac{1}{15}} \times \overline{- a + cz^{-\frac{2}{3}}}\Big|^{-\frac{3}{5}}$. Et si r in neutro casu fuisset numerus integer et affirmativus, conclusissem Curvam ex earum numero esse quæ non possunt Geometrice quadrari. Nam, quantum animadverto, hæc Regula exhibet in infinitis Æquationibus Areas omnium Geometricam Quadraturam admittentium Curvarum, quarum Ordinatim-applicatæ constant ex Potestatibus, Radicibus, vel quibuslibet Dignitatibus Binomii cujuscunque: licet non directe, ubi index Dignitatis est numerus Integer.

At, quando hujusmodi Curva aliqua non potest Geometrice quadrari; sunt ad manus alia Theoremata pro comparatione ejus cum Conicis Sectionibus, vel saltem cum aliis Figuris Simplicissimis quibuscum potest comparari: ad quod sufficit etiam hoc ipsum unicum jam descriptum Theorema, si debite concinnetur.

Pro Trinomiis etiam, et aliis quibusdam, * Regulas quasdam concinnavi. Sed in simplicioribus vulgoque celebratis Figuris, vix aliquid relatu dignum reperi quod evasit aliorum conatus; nisi forte *Longitudo Cissoidis* ejusmodi censeatur. Ea sic construitur.



Sit VD Cissois, AV Diameter Circuli ad quem aptatur, V Vertex, AF Asymptota ejus, ac DB perpendiculare quodvis ad AV demissum. Cum semi-axe AF = AV, et semiparametro AG = $\frac{1}{3}$AV, describatur Hyperbola FkK; et inter AB et AV sumpta AC media proportionali, erigantur ad C et V perpendicula Ck, VK Hyperbolæ occurren-

* [Hæ omnes Regulæ propositionem quintam sextam septimam et octavam Libri de Quadraturis constituunt.] Addition.

tia in k et K; Et agantur rectæ KT, kt tangentes Hyperbolam in eisdem K et k, et occurrentes AV in T et t; et ad AV constituatur rectangulum AVNM æquale spatio TKkt. Et Cissoidis VD longitudo erit Sextupla altitudinis VN. Demonstratio perbrevis est. Sed ad Infinitas Series redeo.

Quamvis multa restent investiganda circa modos approximandi, et diversa Serierum genera quæ possunt ad id conducere: tamen vix cum D. *Tschürnhausio* speraverim dari posse aut simpliciora aut magis generalia fundamenta reducendi Quantitates ad hoc genus Serierum, de quo agimus, quam sunt Divisiones et Extractiones Radicum, quibus *Leibnitius* et ego utimur; Saltem non generaliora: quia pro Quadratura et Εὐθύνσει Curvarum ac similibus, nullæ possunt dari Series ex hisce simplicibus terminis Algebraicis (unicam tantum indefinitam Quantitatem involventibus) constantes, quas non licet hac Methodo colligere.

Nam non possunt esse plures convergentes Series ad idem determinandum, quam sunt indefinitæ Quantitates, ex quarum Potestatibus Series conflentur: et ego quidem ex adhibita quacunque indefinita quantitate Seriem novi colligere; et idem credo *Leibnitio* in potestate esse.

Nam quamvis mea methodo liberum sit eligere, pro conflanda Serie, quantitatem quamlibet indefinitam, a qua quæsitum dependeat; et methodus, quam ipse nobiscum communicavit, determinata videatur ad electionem talium indefinitarum quantitatum, quibus opus commode deduci potest ad Fractiones; quæ per solam Divisionem evadant Series Infinitæ: tamen aliæ quæcunque indefinitæ Quantitates pro Seriebus conflandis adhiberi possunt, per methodum istam qua affectæ Æquationes resolvuntur, dummodo resolvantur in propriis terminis; hoc est, conficiendo Seriem ex solis terminis quos æquatio involvit.

Præterea, non video cur dicatur his Divisionibus et Extractionibus problemata resolvi *per Accidens*: Siquidem hæ operationes eodem modo se habeant ad hoc genus Algebræ, ac vulgares Operationes Arithmeticæ ad Algebram vulgo notam.

Quod autem ad simplicitatem methodi attinet; nolim Fractiones et Radicales absque prævia Reductione semper resolvi in Series Infinitas: Sed, ubi perplexæ quantitates occurrunt, tentandæ sunt omnimodæ Reductiones; sive fiat augendo, minuendo, multiplicando, vel dividendo quantitates indefinitas; sive per methodum Transmutatoriam *Leibnitii*, aut alio quocunque modo qui occurrat. Et tunc Resolutio in Series per Divisionem et Extractionem opportune adhibebitur.

Hic autem præcipue nitendum est, ut Denominatores Fractionum et

Quantitates in Vinculo Radicum, reducantur ad quam paucissimas et minime compositas; et ad tales etiam quæ in Seriem abeunt citissime convergentem, etsi Radices neque convertantur in Fractiones neque deprimantur. Nam, per Regulam initio alterius Epistolæ, Extractio altissimarum Radicum æque simplex et facilis est ac Extractio Radicis Quadraticæ vel Divisio : et Series quæ per Divisionem eliciuntur solent minime omnium convergere.

N° LXIX. Hactenus de Seriebus unicam indefinitam Quantitatem involventibus locutus sum. Sed possunt etiam, perspecta Methodo, Series ex duabus vel pluribus assignatis Indefinitis Quantitatibus pro arbitrio confici. Quinetiam beneficio ejusdem methodi possunt Series ad omnes Figuras efformari, *Gregorianis* ad Circulum et Hyperbolam editis affines; hoc est, quarum ultimus terminus exhibebit quæsitam Aream. Sed calculum hic onerosiorem nolim lubens subire.

Possunt denique Series ex terminis compositis eadem Methodo constitui. Quemadmodum, si sit $\sqrt{aa - ax + \frac{x^3}{a}}$ Ordinatim-applicata Curvæ alicujus; pono $aa - ax = zz$, et ex Binomio $zz + \frac{x^3}{a}$ extracta Radice, prodibit $z + \frac{x^3}{2az} - \frac{x^6}{8aaz^3}$ etc. Cujus Seriei omnes termini quadrari possunt per Theorema jam ante descriptum. Sed hæc minoris facio, quod ubi Series simplices non sunt satis tractabiles, aliam nondum communicatam Methodum habeo, qua pro libitu acceditur ad quæsitum.

Ejus fundamentum est commoda, expedita, generalis solutio hujus Problematis, *Curvam Geometricam describere quæ per data quotcunque Puncta transibit.*

Docuit *Euclides* descriptionem Circuli per Tria data Puncta. Potest etiam Conica Sectio describi per quinque data Puncta : et Curva Trium Dimensionum per Septem data Puncta; (adeo ut in potestate habeam descriptionem omnium Curvarum istius ordinis, quæ per Septem tantum puncta determinantur). Hæc statim Geometrice fiunt nullo Calculo interposito. Sed superius Problema est alterius generis : et quamvis prima fronte intractabile videatur; tamen res aliter se habet. Est enim fere ex pulcherrimis quæ solvere desiderem.

Seriei a D. *Leibnitio* pro Quadratura Conicarum Sectionum propositæ, affinia sunt Theoremata quædam, quæ pro Comparatione Curvarum cum Conicis Sectionibus in Catalogum * dudum retuli.

* Ex his patet Propositiones *Newtoni* de Quadratura Curvarum diu ante annum 1676 inventas fuisse.

Possum utique cum Sectionibus Conicis Geometrice comparare Curvas omnes (numero infinities infinitas), quarum Ordinatim-applicatæ sunt

$$\frac{dz^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut} \quad \frac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut} \quad \frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \quad \text{vel} \quad dz^{\eta-1}\times\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut} \quad \frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fx^{\eta}+gz^{2\eta}}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut} \quad \frac{dz^{\eta-1}\times\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2\eta-1}\times\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut} \quad \frac{dz^{\eta-1}}{g+hz^{\eta}\times\sqrt{e+fz^{\eta}}} \quad \text{vel} \quad \frac{dz^{2\eta-1}}{g+hz^{\eta}\times\sqrt{e+fz^{\eta}}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut} \quad \frac{d}{z}\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}} \quad \text{vel} \quad dz^{\eta-1}\times\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz}} \text{ etc.}$$

Hic d, e, f, g significant quasvis datas Quantitates cum suis Signis $+$ et $-$ affectas; z Axem vel Basem Curvæ; et η, 2η, $\frac{1}{2}\eta-1$, $\frac{3}{2}\eta-1$, $\eta-1$, $2\eta-1$ Indices Potestatum vel Dignitatum z, sive sint Affirmativi vel Negativi, sive Integri vel fracti; et singula bina Theoremata sunt duo primi termini Seriei in infinitum progredientis. In Tertio et Quarto, $4eg$ debet esse non majus quam ff, nisi e et g sint contrarii Signi. In cæteris nulla est limitatio. Horum aliqua (nempe, Secundum, Tertium, Quartum, Quintum et Decimum-tertium) ex Areis duarum Conicarum Sectionum conjunctis constant. Alia quædam (ut Nonum, Decimum et Duodecimum) sunt aliter satis composita. Et omnia quidem in continuatione Progressionum cito evadunt compositissima; adeo ut vix per Transmutationem figurarum, quibus *Jacobus Gregorius* et alii usi sunt, absque ulteriori fundamento inveniri posse putem.

Ego quidem haud quicquam generale in his obtinere potui, antequam abstraherem a contemplatione Figurarum, et rem totam ad simplicem considerationem solarum Ordinatim-applicatarum reducerem. Sed, cum hæc, et hisce generaliora, sint in potestate; non dubitabitur, credo, de Binomialibus longe facilioribus quæ in his continentur, et prodeunt ponendo literam aliquam e vel f vel $g = 0$; et $\eta = 1$ vel 2; etsi Series, in quas ista resol-

vantur, non posuerim in Epistola priori, nedum forte computaverim; intentus, non in omnia particularia enumeranda, sed in illustrandam Methodum per unam et alteram in singulis rerum generibus instantiam, quæ ad ostendendam ejus generalitatem sufficere videbatur.

N° LX Cæterum hæc Theoremata dant Series plusquam uno modo. Nam primum si ponatur $f = 0$ et $\eta = 1$, evadit $\frac{d}{e + gzz}$; unde prodit Series nobis communicata. Sed si ponatur $2eg = ff$, et $\eta = 1$, inde tandem obtinemus hanc Seriem * $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ etc., pro longitudine Quadrantalis Arcus, cujus Chorda est Unitas : vel, quod perinde est, hanc $\frac{1}{2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143} - \frac{1}{255}$ etc., pro longitudine dimidii ejus. Et has forte, quia æque simplices sunt ac alteræ, et magis convergunt, non repudiabitis.

Sed ego rem aliter æstimo. Illud enim melius quod utilius est, et Problema minori labore solvit. Sic, quamvis hæc equatio $x^2 - x = 1$ appareat simplicior hacce $yy - 2y\sqrt{\frac{21}{25} - \sqrt{20}} = \sqrt{20}$; tamen in confesso est posteriorem revera simpliciorem esse, propterea quod Radicem ejus y Geometra facilius eruit.

Et ob hanc rationem Series pro obtinendis Arcubus Circuli, vel (quod eodem recidit) pro obtinendis Sectoribus Conicarum Sectionum, pro optimis habeo quæ componuntur ex potestatibus Sinuum.

Nam si quis vellet per simplex computum hujus Seriei $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ etc., colligere longitudinem Quadrantis ad Viginti figurarum loca decimalia, opus esset 5 000 000 000 terminis Seriei circiter; ad quorum Calculum Milleni Anni requirerentur. Et res tardius obtineretur per Tangentem 45 Graduum. Sed, adhibito Sinu recto 45 Graduum, Quinquaginta-quinque vel Sexaginta termini hujus Seriei $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \overline{1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \frac{5}{896}}$ etc.,

* D. Vicecomes *Brounker* Hyperbolam per hanc Seriem $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{5\times6} + \frac{1}{7\times8} +$ etc. id est per hanc $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} +$ etc. (conjunctis binis terminis) primus omnium quadravit. *Mercator* hanc Quadraturam aliter demonstravit. *Gregorius* communicavit hanc Seriem pro Circulo $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. et *Newtonus* hanc $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} +$ etc.

sufficerent*: quorum computatio Tribus, ut opinor, vel Quatuor Diebus absolvi posset.

Et tamen hic non est optimus modus computandi totam Peripheriam. Nam Series ex sinu recto 30 graduum, vel sinu verso 60 graduum conflata, multo citius dabit Arcum sûum; cujus sextuplum vel duodecuplum est tota Peripheria. Neque majori labore eruitur area totius Circuli ex segmento cujus Sagitta est quadrans diametri. Ejus computi specimen, siquidem ad manus est, visum fuit apponere; et una adjungere Aream Hyperbolæ quæ eodem calculo prodit.

Posito Axe transverso $= 1$, et sinu verso seu segmenti Sagitta $= x$; erit Semi-segmentum $\left.\begin{matrix}\text{Hyperbolæ}\\ \text{Circuli}\end{matrix}\right\} = x^{\frac{1}{2}} \text{ in } \frac{2}{3}x \pm \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{28} \pm \frac{x^4}{72}$ etc. Hæc autem Series sic in infinitum producitur, sit $2x^{\frac{3}{2}} = a. \frac{ax}{2} = b. \frac{bx}{4} = c. \frac{3cx}{6} = d. \frac{5dx}{8} = e. \frac{7ex}{10} = f.$ etc. Et erit Semi-segmentum $\left.\begin{matrix}\text{Hyperbolæ}\\ \text{Circuli}\end{matrix}\right\} = \frac{a}{3} \pm \frac{b}{5} - \frac{c}{7} \pm \frac{d}{9} - \frac{e}{11} \pm \frac{f}{13}$ etc. Eorumque semi-summa $\frac{a}{3} - \frac{c}{7} - \frac{e}{11} -$ etc. et semi-differentia $\frac{b}{5} + \frac{d}{9} + \frac{f}{13} +$ etc. His ita præparatis, suppono $x = \frac{1}{4}$, quadrantem nempe Axis; et prodit $a \left(= \frac{1}{4}\right) = 0{,}25$; $b \left(= \frac{ax}{2} = \frac{0{,}25}{1 \times 8}\right) = 0{,}03125$: $c \left(= \frac{bx}{4} = \frac{0{,}03125}{2 \times 8}\right) = 0{,}001953125$: $d \left(= \frac{3cx}{6} = \frac{0{,}001953125}{8}\right) = 0{,}000244140625$. Et sic procedo usque dum venero ad terminum depressissimum, qui potest ingredi opus. Deinde hos terminos per 3, 5, 7, 9, 11, etc., respective divisos dispono in duas Tabulas : Ambiguos cum primo in unam; et Negativos in aliam; et Addo ut hic vides.

0.0833333333333333	0.0002790178571429
6250000000000	34679066051
271267361111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
16	0.0002825719389575
1	
0.0896109885646618	

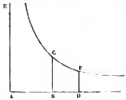
Tunc a priori summa aufero posteriorem, et restat 0.0893284166257043 Area Semi-segmenti Hyperbolici. Addo etiam eas summas, et aggregatum aufero a primo termino duplicato 0.1666666666666666, et restat 0.0767731061630473 Area Semi-segmenti Circularis. Huic addo Triangulum istud quo completur in Sectorem, hoc est $\frac{1}{32}\sqrt{3}$, seu 0.0541265877365274, et habeo Sectorem 60 graduum, 0.1308996938995747, cujus sextuplum 0.7853981633974482 est Area totius Circuli : Quæ divisa per $\frac{1}{4}$ sive quadrantem Diametri, dat totam Peripheriam 3.1415926535897928. Si alias artes adhibuissem, potui per eundem numerum terminorum Seriei pervenisse ad multo plura loca figurarum, puta Viginti quinque aut amplius : Sed animus fuit hic ostendere, quid per simplex Seriei computum præstari posset. Quod sane haud difficile est, cum in omni opere multiplicatores ac divisores magna ex parte non majores quam 11, et nunquam majores quam 41 adhibere opus sit.

Per Seriem *Leibnitii* etiam, si ultimo loco dimidium termini adjiciatur, et alia quædam similia artificia adhibeantur, potest computum produci ad multas figuras. Ut et ponendo summam terminorum $1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{31} + \frac{1}{33}$ etc. esse ad totam Seriem $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ etc. ut $1 + \sqrt{2}$ ad 2. Sed optimus ejus usus videtur esse, quando vel conjungitur cum duabus aliis persimilibus et citissime convergentibus Seriebus; vel sola adhibetur ad computandum arcum 30 graduum, posita Tangente $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Tunc enim Series illa evadit $1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{5 \times 9} - \frac{1}{7 \times 27} + \frac{1}{9 \times 81}$ etc. quæ cito convergit. Vel, si conjunges cum aliis Seriebus, pone circuli Diametrum $= 1$, et $a = \frac{1}{2}$; et area totius circuli erit summa harum trium Serierum $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} + \frac{a^9}{9} - \frac{a^{11}}{11} +$ etc. $\frac{aa}{1} + \frac{a^5}{3} - \frac{a^8}{5} - \frac{a^{11}}{7} + \frac{a^{14}}{9} + \frac{a^{17}}{11}$ etc. $\frac{a^4}{1} - \frac{a^{10}}{3} + \frac{a^{16}}{5} - \frac{a^{22}}{7} + \frac{a^{28}}{9}$ etc.

Hic consideravimus Series quatenus adhibentur ad computandum totum Circulum. Sed quando computandæ sunt partes ejus, tunc quælibet Series habet proprium usum, et in suo genere optima est. Si datur Tangens satis parva vel satis magna, non recurrendum erit ad Sinum aliquem ut inde computetur Arcus, neque vice versa. Series dato congruens est æquatio pro solvendo proprio Problemate.

Credo Cl. *Leibnitium*, dum posuit Seriem pro determinatione Co-sinus ex Arcu dato, vix animadvertisse Seriem meam pro determinatione Sinus Versi ex eodem Arcu; siquidem hæc idem sunt. Nº LXI.

Neque observasse videtur morem meum generaliter usurpandi literas pro quantitatibus cum Signis suis + et − affectis, dum dividit hanc Seriem $\frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} +$ etc. Nam cum Area Hyperbolica BE, hic significata per z, sit affirmativa vel negativa, prout jaceat ex una vel altera parte Ordinatim applicatæ BC; si Area illa in numeris data sit l, et l substituatur in Serie pro z, orietur vel $\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} + \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$ etc. vel $-\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} - \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$ etc.; prout l sit affirmativa vel negativa. Hoc est posito $a = 1 = b$, et l logarithmo Hyperbolico; numerus ei correspondens erit $1 + \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} + \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$ etc. si l sit affirmativus; et $1 - \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$ etc. si l sit negativus. Hoc modo fugio multiplicationem Theorematum, quæ alias in nimiam molem crescerent. Nam v. g. illud unicum Theorema, quod supra posui pro Quadratura Curvarum, resolvendum esset in 32 Theoremata, si pro Signorum varietate multiplicaretur.



Præterea, quæ habet Vir Clarissimus de Inventione Numeri Unitate majoris per datum Logarithmum Hyperbolicum, ope Seriei $\frac{l}{1} - \frac{ll}{1\times2} + \frac{l^3}{1\times2\times3} - \frac{l^4}{1\times2\times3\times4} +$ etc. potius quam ope Seriei $\frac{l}{1} + \frac{ll}{1\times2} + \frac{l^3}{1\times2\times3} + \frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$ etc. nondum percipio. Nam si unus terminus adjiciatur amplius ad Seriem posteriorem quam ad priorem, posterior magis appropinquabit. Et certe minor est labor computare unam vel duas primas figuras adjecti hujus termini, quam dividere Unitatem per numerum prodeuntem ex Logarithmo Hyperbolico ad multa figurarum loca extensum, ut inde habeatur numerus quæsitus Unitate major. Utraque igitur Series (si duas dicere fas sit) officio suo fungatur. Potest tamen $\frac{l}{1} + \frac{l^3}{1\times2\times3} + \frac{l^5}{1\times2\times3\times4\times5}$ etc. Series, ex dimidia parte terminorum constans,

optime adhiberi; siquidem hæc dabit semi-differentiam duorum numerorum, ex qua et rectangulo dato uterque datur. Sic et ex Serie $1 + \frac{u}{1\times 2} + \frac{u^2}{1\times 2\times 3\times 4}$ etc. datur semi-summa numerorum, indeque etiam Numeri. Unde prodit relatio Serierum inter se, qua ex una data dabitur altera.

Theorema de inventione Arcus ex dato Co-sinu, ponendo Radium 1, Co-sinum c, et Arcum $\sqrt{6 - \sqrt{24c + 12}}$, minus appropinquat quam prima fronte videtur. Posito quidem sinu verso v, error erit $\frac{v^2}{90} + \frac{v^3}{194} +$ etc. Potest fieri ut $120 - 27v$ ad $120 - 17v$, ita Chorda $(\sqrt{2v})$ ad Arcum; et error erit tantum $\frac{61v^3\sqrt{2v}}{44800}$ circiter; qui semper minor est quam $5\frac{1}{4}$ minuta secunda, dum arcus non sit major quam 45 grad. Et singulis etiam bisectionibus diminuitur 128 vicibus.

Series $\frac{a^3}{1\times 2\times 3} - \frac{a^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} + \frac{a^7}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7}$ etc. applicari posset ad computationem tabulæ Segmentorum, ut observat Vir Clarissimus. Sed res optime absolvitur per Canonem Sinuum. Utpote, cognita Quadrantis Area, per continuam Additionem nonæ partis ejus habebis Sectores ad singulos Decem Gradus in Semicirculo : deinde per continuam Additionem decimæ partis hujus, habebis Sectores ad Gradus; et sic ad decimas partes Graduum et ultra procedi potest. Tunc, radio existente 1, ab unoquoque Sectore et ejus complemento ad 180 gradus, aufer dimidium communis Sinus Recti, et relinquentur Segmenta in Tabulam referenda. Cæterum quamvis Series hic non prosint, in aliis tamen locum obtinent. Et quoniam hoc ad earum usum spectat, non gravabor in aliquibus attingere.

N° LXII. Constructionem Logarithmorum non aliunde peti debere credetis forte, ex hoc simplici processu qui ab istis pendet. Per methodum supra traditam quærantur Logarithmi Hyperbolici numerorum 10, 0.98, 0.99, 1.01, 1.02 : id quod fit spatio unius et alterius horæ. Dein divisis Logarithmis quatuor posteriorum per Logarithmum numeri 10, et addito Indice 2, prodibunt veri Logarithmi numerorum 98, 99, 100, 101, 102, in Tabulam referendi. Hi per dena intervalla interpolandi sunt, et exibunt Logarithmi omnium numerorum inter 980 et 1020 : et omnibus inter 980 et 1000 iterum per dena intervalla interpolatis, habebitur Tabula eatenus constructa. Tunc ex his colligendi erunt Logarithmi omnium Primorum Numerorum et eorum

multiplicium, minorum quam 100: ad quod nihil requiritur præter Additionem et Substractionem. Siquidem sit $\sqrt[10]{\frac{9984 \times 1020}{9945}} = 2$. $\sqrt{\frac{8 \times 9963}{984}} = 3$. $\frac{10}{2} = 5$. $\sqrt{\frac{98}{2}} = 7$. $\frac{99}{9} = 11$. $\frac{1001}{7 \times 11} = 13$. $\frac{102}{6} = 17$. $\frac{988}{4 \times 13} = 19$. $\frac{9936}{16 \times 27} = 23$. $\frac{986}{2 \times 17} = 29$. $\frac{992}{32} = 31$. $\frac{999}{27} = 37$. $\frac{984}{24} = 41$. $\frac{989}{23} = 43$. $\frac{987}{21} = 47$. $\frac{9911}{11 \times 17} = 53$. $\frac{9971}{13 \times 13} = 59$. $\frac{9882}{2 \times 81} = 61$. $\frac{9849}{3 \times 49} = 67$. $\frac{994}{14} = 71$. $\frac{9928}{8 \times 17} = 73$. $\frac{9954}{7 \times 18} = 79$. $\frac{996}{12} = 83$. $\frac{9968}{7 \times 16} = 89$. $\frac{9894}{6 \times 17} = 97$. Et habitis sic Logarithmis omnium numerorum minorum quam 100, restat tantum hos etiam semel atque iterum per dena intervalla interpolare.



Constructionis Tabulæ Sinuum, a qua pendet tota res Trigonometrica, fundamentum optimum est continua Additio dati Anguli ad seipsum vel ad alium datum. Utpote in Angulo Addendo BAE; inscribantur HI, IK, KL, LM, MN, NO, OP, etc. æquales radio AB: et ad opposita latera demittantur perpendiculares BE, HQ, IR, KS, LT, MV, NX, OY, etc. Et Angulorum HIQ, IKH, KLI, LMK, etc. differentiæ erunt Angulus A; Sinus HQ, IR, KS, etc.; et Co-sinus IQ, KR, LS, etc. Detur jam aliquis eorum LMK, et cæteri sic eruentur. Ad SV et MV demitte perpendicula Ta et Kb; et (propter similia Triangula ABE, TLa, KMb, ALT, AMV, etc.) erit AB . BE :: TL . La $\left(= \frac{SL - LV}{2}\right)$ :: KT $\left(= \frac{1}{2} KM\right) \cdot \frac{1}{2} Mb$ $\left(= \frac{MV - KS}{2}\right)$. Et AB . AE :: KT . Sa $\left(= \frac{SL + LV}{2}\right)$ :: TL . Ta $\left(= \frac{KS + MV}{2}\right)$. Unde dantur Sinus et Cosinus KS, MV, SL, LV. Et simul patet ratio continuandi progressiones. Nempe AB . 2 AE :: LV . TM + MX :: MX . VN + NY etc :: MV . TL + XN :: XN . MV + OY etc. Vel AB . 2 BE :: LV . XN − TL :: MV . TM − MX :: MX . OY − MV :: XN . VN − NY etc. Et retro AB . 2 AE :: LS . KT + RK etc. Pone ergo AB = 1, et fac $BE \times TL = La$. $AE \times KT = Sa$. $Sa - La = LV$. $\overline{2 AE \times LV} - TM = MX$ etc. Sed nodus est inventio Sinus et Co-sinus Anguli A. Et hic subveniunt Series nostræ. Utpote cognita ex superioribus Quadrantalis Arcus longitudine 1.57079 etc; et simul Quadrato ejus

2.4694 etc.; divide Quadratum hoc per Quadratum numeri exprimentis rationem 90 Graduum ad Angulum A: et, Quoto dicto z, tres vel quatuor termini hujus Seriei $1 - \frac{z}{2} + \frac{zz}{24} - \frac{z^3}{720} + \frac{z^4}{40320}$ etc. dabunt Co-sinum istius Anguli A. Sic primo quæri potest Angulus 15 Graduum, et inde Tabula computari ad Quinos Gradus; ac deinde interpolari ad Gradus vel dimidios gradus, per eandem Methodum. Nam non convenit progredi per nimios saltus. Duæ tertiæ partes Tabulæ sic computatæ, dant reliquam tertiam partem, per Additionem vel Subtractionem, more noto. Siquidem posito KT Co-sinu 60 Graduum; fit AE = SV, et BE = Mb. Tunc ad decimas et centesimas partes Graduum pergendum est per aliam Methodum; substitutis tamen prius Logarithmis Sinuum inventorum, si ejus generis Tabula desideretur.

Ad computum Tabularum Astronomicarum *Kepleri;* posui fundamentum aliquod in altera Epistola. Ejus Seriei tres primi termini et aliquando duo sufficiunt. Sed ad diversas partes Ellipseos diversæ ejusmodi Series aptari debent. Vel potius tales Series computandæ sunt, quæ ex data Area Sectoris Elliptici BGE, immediate exhibeant aream Sectoris Circuli, cujus Angulus est BEG, Radius CB. Et habitis hisce, computum earum ad duos, tres, aut forte quatuor terminos, beneficio Logarithmorum, haud gravius erit quam solita Resolutio tot Triangulorum in aliis Hypothesibus: Imo forte minus grave, si Series prius debite concinnentur; siquidem unus Logarithmus e Tabula petitus determinet omnes istos terminos, addendo ipsum et ejus multiplices ad Logarithmos datarum Coefficientium in promptu habitos.

Quæ de hoc genere Tabularum dicuntur, ad alias transferri possunt, ubi ratiocinia Geometrica locum non obtinent. Sufficit autem per has Series computare triginta, vel viginti, aut forte pauciores terminos Tabulæ in debitis distantiis; siquidem termini intermedii facile interseruntur per Methodum quandam, quam in usum Calculatorum fere hic descripsissem. Sed pergo ad alia.

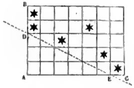
N° LXIII. Quæ Cl. *Leibnitius* a me desiderat explicanda, ex parte supra descripsi. Quod vero attinet ad Inventionem terminorum p, q, r, in Extractione Radicis Affectæ: primum p sic eruo. Descripto Angulo recto BAC, latera ejus BA, CA divido in partes æquales; et inde normales erigo distribuentes angulare spatium in æqualia parallelogramma vel quadrata,

B Fig. 1.

x^4	$x^4 y$	$x^4 yy$	$x^4 y^3$	$x^4 y^4$	$x^4 y^5$	$x^4 y^6$
x^3	$x^3 y$	$x^3 yy$	$x^3 y^3$	$x^3 y^4$	$x^3 y^5$	$x^3 y^6$
x^2	$x^2 y$	$x^2 yy$	$x^2 y^3$	$x^2 y^4$	$x^2 y^5$	$x^2 y^6$
x	$x\ y$	$x\ yy$	$x\ y^3$	$x\ y^4$	$x\ y^5$	$x\ y^6$
o	y	yy	y^3	y^4	y^5	y^6

A C

Fig 2.



quæ concipio denominata esse a dimensionibus duarum indefinitarum specierum, puta x et y, regulariter ascendentium a termino A; prout vides in Fig. 1. inscriptas. Ubi y denotat Radicem extrahendam; et x alteram indefinitam quantitatem, ex cujus potestatibus Series conficienda est. Deinde, cum Æquatio aliqua proponitur, parallelogramma singulis ejus terminis correspondentia insignio nota aliqua: et Regulâ ad duo vel forte plura ex insignitis parallelogrammis applicatâ (quorum unum sit humillimum in columna sinistra juxta AB, et alia ad Regulam dextrorsum sita, cæteraque omnia non contingentia Regulam supra eam jaceant). Seligo terminos Æquationis per parallelogramma contingentia Regulam designatos, et inde quæro quantitatem Quotienti addendam.

Sic ad extrahendam Radicem y, ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$; parallelogramma hujus terminis respondentia signo nota aliqua ✱; ut vides Fig. 2. Dein applico regulam DE ad inferiorem e locis signatis in sinistra columna; eamque ab inferioribus ad superiora dextrorsum

gyrare facio, donec alium similiter vel forte plura e reliquis signatis locis cœperit attingere. Videoque loca sic attacta esse x^3, $xxyy$ et y^6. E terminis itaque $y^6 - 7aaxxyy + 6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (et insuper si placet reductis ad $v^6 - 7vv + 6 = o$, ponendo $y = v\sqrt{ax}$), quæro valorem y, et invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, et $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino Quotientis accipere licet, prout e radicibus quampiam extrahere decretum est.

* Sic Æquatio $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = o$, quam resolvebam in priori Epistola, dat $-2a^3 + aay + y^3 = o$, et inde $y = a$ proxime: Cum itaque a sit primus terminus valoris y, pono p pro cæteris omnibus in infinitum, et substituo $a + p = y$. (Obvenient hic aliquando difficultates nonnullæ; sed ex iis, credo, D. *Leibnitius*, se proprio marte extricabit). Subsequentes vero termini q, r, s, etc. eodem modo ex æquationibus secundis, tertiis, cæterisque eruuntur, quo primus p è prima, sed cura leviori; quia cæteri valores y solent prodire dividendo terminum involventem infimam potestatem indefinitæ quantitatis x per Coefficientem Radicis p, q, r aut s.

N° LXIV. Intellexti credo ex superioribus, Regressionem ab Areis Curvarum ad Lineas Rectas, fieri per hanc Extractionem Radicis Affectæ. Sed duo alii sunt modi quibus idem perficio.

Eorum unus affinis est Computationibus quibus colligebam approximationes sub finem alterius Epistolæ, et intelligi potest per hoc Exemplum. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ $z = x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ etc. Et partibus ejus multiplicatis in se, emerget $z^2 = x^2 + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5$ etc: $z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5$ etc. $z^4 = x^4 + 2x^5$ etc. $z^5 = x^5$ etc. Jam de z aufero $\frac{1}{2}z^2$, et restat $z - \frac{1}{2}z^2 = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{13}{60}x^5$ etc. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$, et fit $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5$ etc. Aufero $\frac{1}{24}z^4$, et restat $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 = x - \frac{1}{120}x^5$ etc. Addo $\frac{1}{120}z^5$, et fit $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 = x$ quamproxime; sive $x = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ etc.

Eodem modo Series de una indefinita Quantitate in aliam transferri pos-

---

* Hanc Resolutionem vide pag. 11[1].

[1] Id est, pag. 63.

sunt. Quemadmodum si posito r Radio Circuli, x Sinu recto arcus z, et $x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} +$ etc. Longitudine arcus istius; atque hanc Seriem a sinu recto ad Tangentem vellem transferre : Quæro longitudinem Tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr-xx}}$, et reduco in infinitam Seriem $x + \frac{x^3}{2rr} + \frac{3x^5}{8r^4}$ etc. Vocetur hæc quantitas t. Colligo potestates ejus $t^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2rr}$ etc. $t^5 = x^5 +$ etc. Aufero autem t de z, et (1) restat $z - t = -\frac{x^3}{3} - \frac{3x^5}{10}$ etc. Addo $\frac{1}{3}t^3$, et fit $z - t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{5}x^5 +$ etc. Aufero $\frac{1}{5}t^5$, et restat $z - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 = o$ quamproxime. Quare est $z = t - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 -$ etc. Sed siquis in usus Trigonometricos me jussisset exhibere expressionem Arcus per Tangentem; eam non hoc circuitu, sed directa methodo quæsivissem.

Per hoc genus Computi colliguntur etiam Series ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus constantes; et Radices affectarum Æquationum magna ex parte extrahuntur. Sed ad hunc posteriorem usum adhibeo potius Methodum in altera Epistola descriptam tanquam generaliorem, et (Regulis pro Elisione superfluorum terminorum habitis) paulo magis expeditam.

Pro Regressione vero ab Areis ad Lineas Rectas, et similibus, possunt hujusmodi Theoremata adhiberi.

Theorema 1. Sit $z = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$ etc. Et vicissim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^3}z^2 + \frac{2bb - ac}{a^5}z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - aad}{a^7}z^4 + \frac{3aacc - 21abbc + 6aabd + 14b^4 - a^3e}{a^9}z^5$ + etc. Exempli gratia. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ, $z = y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ etc. Et substitutis in Regula 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d, et $\frac{1}{5}$ pro e; vicissim exsurgit, $y = z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 +$ etc.

Theorema 2. Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 +$ etc. Et vicissim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^4}z^3 + \frac{3bb - ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc - aad - 12b^3}{a^{10}}z^7 + \frac{55b^4 - 55abbc + 10aabd + 5aacc - a^3e}{a^{13}}z^9$ + etc. Exempli gratia. Proponatur Æquatio ad Arcum Circuli $z = y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6}$ etc. Et substitutis in Regula 1 pro a, $\frac{1}{6rr}$ pro b, $\frac{3}{40r^4}$

(1) [(Ponendo 1 pro r.)] Interpolation.

pro c, $\frac{5}{112r^6}$ pro d etc.; orietur $y = z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} +$ etc.

Alterum modum regrediendi ab Areis ad Lineas rectas celare statui.

Ubi dixi, omnia pene Problemata solubilia existere; volui de iis præsertim intelligi circa quæ Mathematici se hactenus occuparunt, vel saltem in quibus Ratiocinia Mathematica locum aliquem obtinere possunt. Nam alia sane adeo perplexis conditionibus implicata excogitare liceat, ut non satis comprehendere valeamus; et multo minus tantarum computationum onus sustinere quod ista requiretur.

Attamen, ne nimium dixisse videar, inversa de Tangentibus Problemata sunt in potestate, aliaque illis difficiliora. Ad quæ solvenda usus sum duplici Methodo; una concinniori, altera generaliori. Utramque visum est impræsentia literis transpositis consignare, ne propter alios idem obtinentes, institutum in aliquibus mutare cogerer. * *5accdæ 10effh 12i 4l 3m 10n 6oqqr 7s 11t 10v 3x : 11ab 3cdd 10eæg 10ill 4m 7n 6o 3p 3q 6r 5s 11t 7vx, 3acæ 4egh 6i 4l 4m 5n 8oq 4r 3s 6t 4v, aaddææeeeeeiimmmnnooprrrsssssttuu.*

Inversum hoc Problema de Tangentibus, quando Tangens inter punctum contactus et axem Figuræ est datæ longitudinis, non indiget his Methodis. Est tamen Curva illa Mechanica, cujus determinatio pendet ab Area Hyperbolæ.

Ejusdem generis est etiam Problema, quando pars Axis inter Tangentem et Ordinatim applicatam datur longitudine.

Sed hos casus vix numeraverim inter ludos [1] naturæ. Nam quando in Triangulo Rectangulo, quod ab illa Axis parte et Tangente ac Ordinatim-applicata constituitur, relatio duorum quorumlibet laterum per Æquationem

---

* Id est, *Una Methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus : altera tantum in assumptione Seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua cætera commode derivari possunt, et in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis, ad eruendos terminos assumptæ Seriei.* Analysin (1) per Fluentes et earum Momenta in æquationibus tam infinitis quam finitis, *Newtonus* in his Epistolis ad Regulas quatuor reduxit. Per primam extrahitur Fluens ex Binomiis, adeoque ex æquationibus quibuscunque non affectis in Serie infinita, et Momentum fluentis simul prodit, quo evanescente Series in Æquationem finitam redit. Per secundam extrahitur Fluens ex æquationibus affectis Fluxionem non involventibus. Per tertiam extrabitur Fluens ex æquationibus affectis Fluxionem simul involventibus. Per quartam eruitur Fluens ex conditionibus Problematis. Regulæ duæ primæ in principio Epistolæ superioris, duæ ultimæ in fine hujus ponuntur. Harum Regularum *Newtonum* esse inventorem primum nemo dubitat.

(1) [inversam.] Interpolation.

[1] Voir la note à la page 120.

quamlibet definitur, Problema solvi potest absque mea Methodo Generali: Sed ubi pars Axis ad punctum aliquod positione datum terminata ingreditur Vinculum; tunc res aliter se habere solet.

Communicatio Resolutionis Affectarum Æquationum per Methodum *Leibnitii*, pergrata erit; juxta et explicatio quomodo se gerat, ubi indices potestatum sunt Fractiones; ut in hac Æquatione $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}} y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$; aut Surdæ † Quantitates, ut in hac $\overline{x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}}\Big|^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = y$: ubi $\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$ non designant Coefficientes ipsius x, sed indices Potestatum seu Dignitatum ejus; et $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ indicem Dignitatis Binomii $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Res, credo, mea methodo patet; aliter descripsissem.

Sed meta tandem prolixæ huic Epistolæ ponenda est. Literæ sane Excellentissimi *Leibnitii* valde dignæ erant, quibus fusius hoc Responsum darem. Et volui hac vice copiosor esse, quia credidi amœniora tua negotia severiori hoc scribendi genere non debere a me crebro interpellari.

Tui Studiosissimus

Is. Newton.

Excerpta ex Epistola D. Collins *ad D.* Newtonum, Londini 5 Martii 1677 *data. Integra autem extat impressa in Tomo tertio Operum D.* Wallisii *pag.* 646, *etc.* Nº LXV

Clarissime Vir,

Aderat hic D. *Leibnitius* per unam Septimanam, in mense *Octobris*; in reditu suo ad Ducem *Hanoveræ*; cujus literis revocatus erat, in ordine ad quandam Promotionem.

Dixit *Leibnitius*, se posse et velle consilia impertire, pro obtinendis Seriebus, absque Speciosa Extractione Radicum Æquationum affectarum; modo quis velit laborem illum obire.

Et consequenter ad hoc, (postquam ego D. *Bakerum* ipsi nominaveram), literis ejus ad D. *Oldenburgum*, datis *Amstelodami*, $\frac{18}{28}$ *Novemb.* 1676, hæc scribit.

---

† [Surdos indices D. *Leibnitius* in Epistola sequente mutavit in fluentes, et inde natus est calculus exponentialis.] Addition.

« D. *Collinio* hæc quæso communica. Dixit ille mihi D. *Bakerum*, doctum « admodum et industrium apud vos Analyticum, utilibus consiliis exe- « quendis parem esse. Elegi ego unum præ reliquis utile et facile. Nimi- « rum, Methodus Tangentium a *Slusio* publicata nondum rei fastigium te- « net. Potest aliquid amplius præstari in eo genere, quod maximi foret « usus ad omnis generis Problemata : Etiam ad meam (sine extractionibus) « Æquationum ad Series reductionem. Nimirum, Posset brevis quædam « calculari circa Tangentes Tabula, eousque continuanda, donec progressio « Tabulæ apparet; ut eam scilicet quisque, quousque libuerit, sine calculo « continuare possit.

« *Amstelodami* cum *Huddenio* locutus sum; cui negotia civilia tempus « omne eripiunt. Est enim ex numero 12 urbis Consulum, qui subinde « imperium obtinent : Nuper Consul Regens erat; nunc Thesaurarii « munus exercet. Præclara admodum in ejus Schedis superesse certum « est. Methodus Tangentium a *Slusio* publicata dudum illi fuit nota. « Amplior ejus Methodus est, quam quæ a *Slusio* fuit publicata. Sed « et Quadratura Hyperbolæ *Mercatoris* ipsi jam Anno 1662 innotuit. » Hactenus *Leibnitius*.

P. S. Exemplar Epistolæ tuæ (quatuor schedarum) nondum est ad D. *Leibnitium* missum : Sed, intra Septimanam, est quidam hinc profecturus *Hanoveram*, qui tum illud tum libros quosdam laturus est.

N° LXXI. *Epistola D.* Leibnitii *ad D.* Oldenburgum, 21 Junii 1677 *data, cum D.* Newtono *communicanda. Cujus extat* (1) *exemplar manu D.* Collins *descriptum*.

Amplissime Domine,

Accepi Literas tuas diu expectatas, cum inclusis *Newtonianis* sane pulcherrimis; quas plus semel legam cum cura et meditatione; quibus certe non minus dignæ sunt quam indigent. Nunc pauca quæ festinante oculo obeunti incidère e vestigio annotabo.

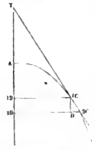
Egregie placet, quod descripsit qua via in nonnulla sua elegantia sane Theoremata inciderit. Et quæ de *Wallisianis* Interpolationibus habet, vel ideo placent, quia hac ratione obtinetur harum Interpolationum Demon-

---

(1) [*Et autographum et.*] Interpolation.

stratio, cum res ea antea (quod sciam) sola inductione niteretur; tametsi pars eorum per Tangentes sit demonstrata.

Clarissimi *Slusii* Methodum Tangentium nondum esse absolutam Celeberrimo *Newtono* assentior. Et jam a multo tempore * rem Tangentium longe generalius tractavi; scilicet per differentias Ordinatarum. Nempe T 1B (intervallum Tangentis ab Ordinata in Axe sumptum) est ad 1B 1C Ordinatam, ut 1CD (differentia duarum Abscissarum A 1B, A 2B) ad D 2C (differentiam duarum Ordinatarum 1B 1C, 2B 2C). Nec refert quem angulum faciunt Ordinatæ ad Axem. Unde patet, nihil aliud esse invenire Tangentes, quam invenire Differentias Ordinatarum, positis differentiis Abscissarum (seu 1B 2B = 1CD) si placet æqualibus. Hinc nominando † in posterum, dy differentiam duarum proximarum y (nempe A 1B et A 2B); et dx seu D 2C differentiam duarum proximarum x (prioris 1B 1C, posterioris 2B 2C); patet dy^2 esse $2y dy$; et dy^3 esse $3y^2 dy$, etc. et ita porro. Nam sint duæ proximæ sibi (id est, differentiam habentes infinite parvam) scilicet A 1B $= y$; et A 2B $= y + dy$. Quoniam ponimus dy^2 esse differentiam quadratorum ab his duabus rectis, Æquatio erit $dy^2 = y^2 + 2y\,dy + dy\,dy - y^2$. Seu omissis $y^2 - y^2$ quæ se destruunt, item omisso quadrato quantitatis infinite parvæ (ob rationes ex Methodo de Maximis et Minimis notas), erit $dy^2 = 2y\,dy$. * Idemque est de cæteris potentiis. Hinc etiam haberi possunt differentiæ quantitatum ex diversis indefinitis in se invicem ductis factarum: ut dyx erit $= y dx + x dy$; et $dy^2 x = 2xy\,dy + y^2 dx$. Hinc si æquatio $a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2 x + hyx^2$ etc. $= 0$; statim habetur Tangens Curvæ ad quam est ista Æquatio. Nam ponendo AB $= y$, et A 2B $= y + dy$ (scilicet, quia 1B 2B seu 1CD $= dy$); Itemque ponendo 1B 1C $= x$, et



* Idem fecit D. *Barrow* in ejus Lect. 10, Anno 1669 impressa, idque calculo consimili.

† Cœpit igitur D. *Leibnitius* hoc ipso tempore Methodum differentialem cum amicis scripto communicare; lectis prius quæ *Newtonus* de hac Methodo in duabus Epistolis scripserat, Lectis fortean et aliis *Newtonianis* sub finem Anni 1676, ubi domum per *Londinum* redibat. (1)

(1) [Quo tempore Prælectiones *Barrowii* secum tulit.] Addition.

* Id est, Si secundus terminus Binomii sit differentia primi termini, secundus terminus potestatis Binomii erit differentia potentiæ. Hoc est fundamentum Methodi differentialis a *Leibnitio* jam positum. Et hoc idem fundamentum Methodi suæ *Newtonus* Anno 1669 posuerat in Analysi supra impressa, page 19[1]. Persimilibus calculis *Newtonus* Momenta, et *Leibnitius* Differentias collegerunt, et discrepant solum in rerum nominibus.

[1] *Id est*, pag. 73.

2B 2C = 1 + dx (scilicet, quia 2CD = dx), Et quia eadem æquatio exprimit quoque relationem inter A 2B et 2B 2C, quæ eam exprimebat inter A 1B et 1B 1C; † Tunc in æquatione illa pro y et x substituendo $y + dy$, et $x + dx$, fiet

$$\left.\begin{array}{l} a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 \text{ etc.} \\ \hline b\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}x + dy\,\mathrm{d}x + 2ey\,\mathrm{d}y + 2fx\,\mathrm{d}x + 2gxy\,\mathrm{d}y + 2hxy\,\mathrm{d}x \text{ etc.} \\ \qquad + dx\,\mathrm{d}y \qquad\qquad + gy^2\mathrm{d}x + hx^2\mathrm{d}y \text{ etc.} \\ \hline \qquad + d\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + e\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y + f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x + gx\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y + hy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x \\ \qquad\qquad + 2gy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + 2hx\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \text{ etc.} \\ \qquad\qquad + g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x \end{array}\right\} = 0.$$

d est quantitas communi more.
d est nota Differentiæ.

Ubi, abjectis illis quæ sunt supra primam lineam, quippe nihilo æqualibus per æquationem præcedentem; et abjectis illis quæ sunt infra secundam, quia in illis duæ infinite parvæ in se invicem ducuntur; hinc restabit tantum æquatio hæc $b\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}x + dy\,\mathrm{d}x$ etc. $= 0$, quicquid scilicet re-
$+ dx\,\mathrm{d}y$
peritur inter lineam primam et secundam. Et mutata æquatione in rationem seu analogiam, fiet $-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{c + dy + 2fx + gy^2 + 2hxy \text{ etc.}}{b + dx + 2ey + 2gxy + hx^2 \text{ etc.}}$. Id est $\left(\text{quia } -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \text{ seu } \frac{-1B\,2B, \text{ seu } -1CD}{D\,2C} = -\frac{T\,1B}{1B\,2C}\right)$ erit $\frac{c + dy \text{ etc.}}{b + dx \text{ etc.}} = -\frac{T\,1B}{1B\,1C}$. Quod coincidit cum Regula *Slusiana*, ostenditque eam statim occurrere hanc Methodum intelligenti.

Sed Methodus ipsa (priore) nostra longe est amplior. Non tantum enim exhiberi potest, cum plures sunt literæ indeterminatæ quam y et x (quod sæpe fit maximo cum fructu); Sed et tunc utilis est cum interveniunt irrationales, quippe quæ eam nullo morantur modo, neque ullo modo necesse est irrationales tolli, quod in Methodo *Slusii* necesse est, et calculi difficultatem in immensum anget.

Quod ut appareat, tantum utile erit in irrationalitalibus simplicioribus rem explanare. Et primum sit in simplicissimis generaliter. Si sit aliqua potentia aut radix x^z; erit $\mathrm{d}x^z = zx^{z-1}\mathrm{d}x$.

Si z sit $\frac{1}{2}$, seu si x^z sit $\sqrt{x}$, erit $\mathrm{d}x^z$, seu hoc loco $\mathrm{d}\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$ seu $\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$; ut notum aut facile demonstrabile.

Sit jam Binonium, ut $\sqrt{^3 : \overline{a + by + cy^2 \text{ etc.}}}$ quæritur $\mathrm{d}\sqrt{^3 : \overline{a + by + cy^2 \text{ etc.}}}$ seu $\mathrm{d}x^z$, posito $\frac{1}{3} = z$, et $a + by + cy^2$ etc. $= x$. Est autem $\mathrm{d}x = b\,\mathrm{d}y$

† Calculus etiam in his Exemplis allatus a calculo *Newtoniano* in solis notarum formulis differt, sed notis minus aptis obscurior redditur.

$+ 2cy\,\mathrm{d}y$ etc. Ergo $\mathrm{d}x^2$ seu $\frac{\mathrm{d}x}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{b\,\mathrm{d}y + 2cy\,\mathrm{d}y \text{ etc.}}{3 \times \overline{a + by + cy^2 \text{ etc.}}|^{\frac{2}{3}}}$. Eadem Methodus adhiberi potest etsi Radices in Radicibus implicentur. Hinc si detur æquatio valde intricata, ut $a + bx\sqrt{y^2 + b\sqrt[3]{:\overline{1+y}}} + hx^2y\sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}} = 0$. Ad aliquam Curvam cujus Abscissa sit y (AB), Ordinata x (BC), tunc Æquatio proveniens utilis ad inveniendam Tangentem TC, statim sine calculo scribi poterit; et erit hæc

$$b\,\mathrm{d}x\sqrt{y^2 + b\sqrt[3]{:\overline{1+y}}} + \frac{bx}{2\sqrt{y^2 + b\sqrt[3]{:\overline{1+y}}}} \times \overline{2y\,\mathrm{d}y + \frac{b\,\mathrm{d}y}{3 \times \overline{1+y}|^{\frac{2}{3}}}}$$
$$+ \overline{hx^2\,\mathrm{d}y + 2hxy\,\mathrm{d}x} \times \sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}}$$
$$+ \frac{hyx^2}{2\sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}}} \times \overline{2y\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}y\sqrt{1-y} - \frac{y\,\mathrm{d}y}{2\sqrt{1-y}}} = 0.$$

Seu, mutando Quotientem hanc inventam in Analogiam, erit $-\,\mathrm{d}y$ ad dx, seu T 1B ad 1B 1C, ut omnes provenientis æquationis termini per dx multiplicati, ad omnes ejusdem terminos per $\mathrm{d}y$ multiplicatos.

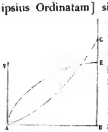
Ubi sane mirum et maxime commodum evenit, quod $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}x$ semper extant extra vinculum irrationale. Methodo autem *Slusiana* omnes ordine irrationales tollendas esse nemo non videt.

Arbitror, quæ celare voluit *Newtonus* de Tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit, ex hoc eodem fundamento * quadraturas quoque reddi faciliores, me in sententia hac confirmat, nimirum semper figuræ illæ sunt quadrabiles quæ sunt ad Æquationem Differentialem. Æquationem Differentialem voco talem qua valor ipsius $\mathrm{d}x$ exprimitur, quæque ex alia derivata est qua valor ipsius x exprimebatur. Exempli gratia; sit AB $= y$. EB $= x$; ponatur $\frac{b + cy + dy^2 + ey^3 \text{ etc.}}{2\sqrt{1 + by + \frac{1}{2}cy^2 + \frac{1}{3}dy^3 + \frac{1}{4}ey^4 \text{ etc.}}}$. Quæritur Quadratura figuræ ABEA (quanquam forte sæpe tale Trilineum non sit proditurum quale hoc schemate depinximus). Describatur alia Curva AC, talis ut BC [quæ] sit

$$\sqrt{1 + by + \tfrac{1}{2}cy^2 + \tfrac{1}{3}dy^3 + \tfrac{1}{4}ey^4 \text{ etc.}}$$

* Characteres Methodi *Newtoni Leibnitius* hic enumerat, et gaudet se in Methodum incidisse cui Characteres hi omnes competunt. Fatetur etiam *Newtonum* intellexisse facilem quadraturam Figurarum quæ sunt ad Æquationem Differentialem. Vel doceat Methodum aliam in rerum natura extare cui Characteres hi omnes competunt, vel desinat negare se in Methodum *Newtoni* incidisse.

[ipsius Ordinatam] significet; et Rectangulum sub recta AV repræsentante Unitatem constructionis, et sub ordinata nova BC, æquabitur figuræ ABEA. Ejusmodi Theoremata condi possunt infinita : Imo pleraque sub generallissimis quibusdam complecti. Licet nihil refert sive Series hæ producantur, sive ubilibet finiantur. Unde patet hanc unicam Regulam pro infinitis figuris quadrandis inservire, diversæ plane naturæ ab iis quæ hactenus quadrari solebant.



Pulcherrimæ sunt illæ Series *Newtonianæ* quæ ex Infinitis in Finitas degenerant; qualis illa est quam exhibet pro Extractione Radicum Binomii, aut ejus Quadratura. Quodsi in ipsius generali illa Æquationis Affectæ indefinitæ Extractione, cum sit $x = ay + by^2 + cy^3$ etc., et y fit $\frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4}$ etc., vel $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4}$ etc. : idem præstari posset; ut scilicet, inter extrahendum radices ex æquationibus aut binomiis, invenire liceret Radices rationales finitas quando eæ insunt, vel etiam irrationales : Tunc dicerem Methodum Serierum infinitarum ad summam perfectionem esse perductam.

Opus esset tamen præterea, discerni posse varias æquationis ejusmodi Radices : Item necesse esset, ope Serierum, discerni æquationes Possibiles ab Impossibilibus. Quodsi hæc nobis obtinuerit Vir in his studiis maximus, atque effecerit scilicet ut possimus Seriem Infinitam convertere in Finitam quando id fieri potest, aut saltem agnoscere ex quanam finita sit deducta : Tunc in methodo Serierum Infinitarum, quæ Divisione et Extractione inveniuntur, vix quicquam amplius optandum restabit. Hæc, si quisquam mortalium, certe *Newtonus* præstare poterit. Eadem credo opera efficietur, ut, ex multis Seriebus Infinitis, possimus deligere maxime naturales; quales haud dubie illæ erunt, quæ ita erunt comparatæ, ut, cum fieri potest, atque opus est, degenerent in Finitas. Atque ita egregie apparebit Methodum Extractionum per Series Infinitas minime Indirectam, sed maxime Naturalem esse.

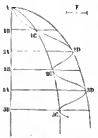
N° LXVIII.[1] Problema est perelegans cujus meminit, Curvam describere quæ per data quæcunque transeat Puncta. *Huddenius* mihi *Amstelodami* dixit, posse se Curvam describere Analyticam, seu certa Æquatione uniformi constantem, quæ Faciei Hominis cujusdam noti lineamenta designet.

Cæterum quærendum est, an hoc *Newtonus* intelligat de Punctis Infi-

---

[1] N° LXVII, *desiderabatur*.

nitis; ut si sit Axis A 1B 2A 2B 3A etc. in infinitum productus; et duæ curvæ datæ infinitæ Analyticæ, una A 1C 2C 3C, etc., altera A 2D 3D etc.; si ponamus A 1B, 1B 2A, 2A 2B, 2B 3A, etc., inter se et datæ cuidam quantitati F æquales; Quæritur an dari possit Curva Analytica, seu Æquationis capax, quæ in infinitum producta transeat (alternis) per puncta 1C, 2D, 2C, 3D, 3C, etc. *Fermatius* alicubi scribit, se Methodum habere per quam Curva inveniri possit, cujus proprietas specifica data non pertineat ad unum Punctum, ut vulgo fit, cum Ordinatæ referuntur ad partes Axis; sed ad duo quælibet simul, vel etiam ad tria quælibet simul, etc.



*Quæ de variis Seriebus suis et nostris examinandis atque inter se comparandis dicit Clarissimus *Newtonus;* in ea me immergere non audeo, antequam in gratiam cum Analysi rediero: nam harum rerum vestigia in animo meo prope nunc obliterata sunt. Agnosco interim pulcherrima et utilissima ab eo annotari. Elegantissima et minime expectata est via qua seriem meam $\frac{1}{1}t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$ etc. deduxit ex sua.

Quod ait, Problemata methodi tangentium Inversæ, esse in potestate; hoc arbitror ab eo intelligi per Series scilicet Infinitas: †Sed a me ita desiderantur, ut Curvæ exhibeantur Geometrice quatenus id fieri potest, suppositis (minimum) Quadraturis. Exempli causa. Cycloidem deprehendit

* Vide pag. 42, lin. 7, 8; et pag. 45, lin. 22 et seq. [1].

† Dixerat *Newtonus*, Analysin beneficio æquationum infinitarum ad omnia pene Problemata sese extendere (pag. 55, lin. penult. [2]) Respondit *Leibnitius;* Multa esse *Problemata* usque adeo mira et implexa ut neque ab æquationibus pendeant neque a quadraturis, qualia sunt Problemata Methodi Tangentium inversæ etc. pag. 65, lin. 15 [3]. Rescripsit *Newtonus*, *inversa de Tangentibus Problemata esse in potestate, aliaque illis difficiliora; ad quæ solvenda se usum esse duplici Methodo* etc. pag. 85 [4]. *Leibnitius* vero ne quid a *Newtono* jam didicisse videretur, regerit solutionem a *Newtono intelligi per Series infinitas: sed a se ita desiderari ut Curvæ exhibeantur Geometricæ quatenus id fieri potest.* In priore Epistola negaverat Analysin *Newtonianam* per Æquationes Infinitas ad hæc Problemata extendi. Jam negat se negasse, et verbis prioribus nubem obducit, quasi inversum illud Problema suo sensu non solveretur, nisi Curvæ exhibeantur Geometricæ quatenus id fieri potest, et Curva quæ sui ipsius Evolutione describitur, inveniri possit per eandem solutionem.

[1] *Id est*, pag. 96, lin. 1 et 2, et pag. 99, lin. 9 et seq.

[2] *Id est*, pag. 109, lin. 23.

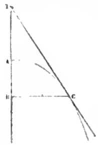
[3] *Id est*, pag. 120, lin. 7.

[4] *Id est*, pag. 144, lin. 10.

Hugenius sui ipsius Evolutione describi : Difficile autem fuisset, credo, solvere hoc Problema, Invenire Curvam quæ sui ipsius Evolutione describitur. Neque refert quod Curvæ Descriptio quadraturam Circuli supponit : Et hoc Problema etiam ex eorum est numero, quæ voco Methodi Tangentium Inversæ. Ita inter Methodos Tangentium Inversas generales est, Invenire Curvam Analyticam cujus Longitudines sint Areis datæ figuræ, Curvâ Analytica comprehensæ, proportionales. Contrarium enim dudum possumus. Quod problema arbitror non esse Insolubile, et videtur non contemnendum : Facilius enim est Lineam quam Spatium organice metiri. Et, reducta Spatiorum dimensione ad dimensionem Linearum, solis Filis in rectum extensis Mechanica fieri poterit Constructio; et Spatia poterunt in data ratione secari instar Linearum rectarum.

Nº LXVIII. Cum ait *Newtonus*, investigationem Curvæ, quando Tangens, vel intervallum Tangentis et Ordinatæ in Axe sumptum, est recta constans, non indigere his Methodis : innuit credo se intelligere Methodum Tangentium Inversam generalem in potestate esse per Methodos Serierum appropinquativas; in hoc vero casu speciali * non opus esse Seriebus. Ego vero Methodum quærebam quæ accurate Curvam quæsitam exhibeat, saltem ex suppositis Quadraturis; et cujus ope ejus Æquationem, si quam habet, aut aliam primariam proprietatem possumus invenire.

Quod ait, Problemata in quibus datur relatio inter duo latera Trianguli TBC semper posse solvi : Id verum est; at ex † meis quoque artibus fluit; ac sæpe, ne Quadraturis quidem accitis, simplici Analytica Æquatione præstari potest. Ut, si BC posita x, sit $TB = bx + cx^2 + dx^3$, quæritur Qualisnam sit hæc curva quæ hanc Tangentium habeat proprietatem : id est, Quænam sit Æquatio relationem exprimens inter AB seu y, et BC seu x. Aio eam fore $y = bx + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{3}dx^3$. Si fuisset $TB = a + bx + cx^2$, opus fuisset Quadratura Hyperbolæ ad inveniendam Curvam quæsitam. Generaliter



* Hoc non dixit *Newtonus*, sed perspicue dixit Problema in hoc casu non indigere Methodis duabus generalibus, quas literis transpositis celaverat. Vide pag. 86 [1].

† Per artes suas intelligit Methodum differentialem, ut patet ex calculis quos subjungit. Ubi Epistolam priurem scribebat, Problema de Curva invenienda, in qua intervallum Tangentis et Ordinatæ in Axe sumptum sit recta constans, vocabat Ludum naturæ, et ejusmodi

1 *Id est*, pag. 145, lin. 1.

autem, quomodocunque datur relatio inter duo ex lateribus Trianguli, (quod ego *Characteristicum*, ob crebros usus, vocare soleo) semper, suppositis Quadraturis Figurarum Analyticarum, haberi potest Curva quæsita. Quod tamen nescio an præter *Newtonum* præstiturus sit quisquam.

Mea Methodo, res unius lineolæ calculo peragitur ac demonstratur. Sed et rem infinitis casibus præstare possum, tametsi ipsa y seu AB ingrediatur in ipsius TB expressionem. Ut, si sit $TB = bx + cx^2 + dx^3 - y$, fiet Æquatio Curvæ $yx = bx + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{3}dx^2$. [*Forte legendum*, $TB = b + cx + dx^2 - y$, *fiet æquatio Curvæ*, $yx = bx + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{3}dx^3$.] Itaque si habeatur valor ipsius TA, ex BC haberi poterit Curva.

Quod vero ait Cl. *Newtonus* * non æque rem procedere si detur relatio ipsius TB ad partem axis, seu ad AB vel y, ad hoc respondeo; mihi æque facile esse invenire Curvæ naturam vel æquationem, si detur relatio ipsius TB ad AB, quam si, ut ipse requirit, detur relatio ad BC. Generalem vero methodum Tangentium inversam nondum quod sciam habemus.

Sunt et alia Problematum genera quæ hactenus in potestate non habeo, N° LXIX.
quorum ecce exempla. Sint duæ æquationes $x^y + y^x = xy$, et $x^x + y^y = x + y$. Duæ sunt incognitæ x, y, duæque ad eas inveniendas æquationes; quæritur valor tam unius quam alterius literæ. Talia Problemata vel in numeris vel in lineis solvere difficillimum arbitror; si tamen de appropinquationibus agatur, puto posse iis satisfieri. Si quam huic difficultati Lucem

---

Problemata mira et implexa ab æquationibus pendere noluit. Respondebat *Newtonus* hoc Problema non esse ludum naturæ, sed ubi datur relatio quævis inter ordinatam, et tangentem, et intervallum utriusque in Axe sumptum, semper posse solvi, idque absque sua Methodo generali; nempe per Fluxionum methodum simplicem et Quadraturam Curvarum. Jam rescribit *Leibnitius*, *Id verum esse*, *at ex ejus quoque artibus fluere*, (id est ejusmodi Problemata ab æquationibus suis pendere) et triangulum TBC, *ob crebros usus*, *Characteristicum vocat*, quasi hæc ipsi dudum innotuissent. Hujusmodi problemata ab æquationibus non pendere anno superiore scripsit: jam fluunt horum solutiones ex ejus artibus, ac sæpe ne quadraturis quidem accitis; simplici analytica æquatione (differentiali scilicet) peraguntur.

* Dixerat *Newtonus* quod ubi *relatio duorum quorumlibet laterum Trianguli definiretur per æquationem*, *Problema solvi potest absque generali ejus Methodo quam literis transpositis celaverat*, *sed ubi pars Axis vel Abscissæ ingreditur vinculum res aliter se habere solet*, id est, indiget ejus Methodo generali, præterquam in particularibus quibusdam. *Leibnitius* ad particularia illa alludens *sibi æque facile esse invenire Curvæ naturam vel æquationem in utroque casu*. Quibus verbis manifestum est solutionem generalem ei nondum innotuisse.

afferre potest *Newtonus*, pro ea qua pollet ingenii vi, multum Analysin promovebit.

Analysis quoque *Diophantæa*, seu solutio Problematum in numeris rationalibus nondum perfectionem nacta est.

Hæc annotavi festinans atque inter legendum; ad reliqua majore otio opus est : Interea celeberrimum *Newtonum* quæso officiosissime a me saluta, et post actas maximas gratias eum roga, ut communicet continuationem harum Serierum; nempe posita $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ etc. ait fore $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^3$ etc. vel $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{3b^2 - ac}{a^5} z^3$ etc. Et si qua alia in promptu habet Theoremata nonnihil generalia; quoniam ad calculum contrahendum plurimum serviunt : quod si eorum originem sive demonstrationem addet, tanto magis obligabit. Velim etiam nosse an per Extractiones in Seriebus discernere possit æquationes possibiles ab impossibilibus; nam si generalis ejusmodi extractio procederet, sequeretur nullam æquationem fore impossibilem : item quomodo inveniat diversas ejusmodi æquationis radices, ita ut ex pluribus radicibus eam possit invenire quam quærimus : item an tales habeat Series quarum ope extrahendo æquationis inveniuntur valores finiti, quando tales insunt æquatione : denique quid sentiat de resolutione æquationum quales paulo ante posui, ut $x^y + y^x = xy$ et $x^x + y^y = x + y$; ubi scilicet incognita ingreditur in exponentem.

Oblitus eram dicere pulchram mihi videri Cissoidis extensionem in rectam, quam *Newtonus* invenit, ex supposita Quadratura Hyperbolæ. Ego mihi videor eodem modo etiam metiri posse[1] curvam Hyperbolæ æquilateræ, sed nondum omnis; neque curvam Ellipseos quantum memini.

Antequam finiam adjiciam usum pulcherrimum Serierum, qui imprimis *Collinio* nostro non erit ingratus. Scis magnam esse difficultatem circa extrahendas radices ex binomiis Cubicis, quândo eas ingreditur quantitas imaginaria, orta ex radice quadratica negativæ quantitatis; ut $\sqrt{3}:\overline{a + \sqrt{-bb}} = M + \sqrt{3}:\overline{a - \sqrt{-bb}} = N$: ubi utraque quantitas M et N est singulatim impossibilis, summa autem, ut alibi ostendi, *est quantitas possibilis et realis, æqualis cuidam quæsitæ z. Ut vero ea eximatur, et ut extrahatur radix, nempe ut inveniatur $\frac{1}{2} z + e\sqrt{-bb} = \sqrt{3}:\overline{a + \sqrt{-bb}}$, et $\frac{1}{2} z - e\sqrt{-bb} = \sqrt{3}:\overline{a - \sqrt{-bb}}$ (unde fit $\sqrt{3}:\overline{a + \sqrt{-bb}} + \sqrt{3}:\overline{a - \sqrt{-bb}} = z$)

---

[1] Rogatur D. *Leibnitius* ut hoc theorema lucem tandem videat. [*Note supprimée.*]

* Summa est quantitas triplex possibilis, ideoque non nisi tripliciter exhiberi potest.

non potest adhiberi Methodus *Schotenii* Geometriæ *Cartesianæ* subjecta, quia opus est ad eam ut valor ipsius $\sqrt{3}:\overline{a+\sqrt{-bb}}$ exhibeatur saltem approximando, quod notis Methodis impossibile est. Quis enim valorem ipsius $\sqrt{-bb}$ prope verum dabit? necesse est enim invenire $b\sqrt{-1}$; quis autem exprimat $\sqrt{-1}$ appropiuquando? Scripsi olim *Collinio* me remedium invenisse, quod etiam ad omnes gradus superiores valeat: id ecce hic uno verbo. Ex Binomio $\sqrt{3}:\overline{a+\sqrt{-bb}}$ extraho radicem per Seriem Infinitam, sive per Theorema *Newtonianum*, sive etiam more meo priore, instituendo calculum secundum naturam cujusque gradus, cum scilicet nondum Theorema generale abstraxissem: quæ radix ponatur esse $l+m\sqrt{-bb}+n+p\sqrt{-bb}$ etc. Extrahatur jam et radix ex Binomio altero $\sqrt{3}:\overline{a-\sqrt{-bb}}$, fiet illa $+l-m\sqrt{-bb}+n-p\sqrt{-bb}$ etc. ut facile demonstrari potest ex calculo: ergo * addendo hæc duo extracta, destruentur imaginariæ quantitates, et fiet $z=2l+2n$ etc. quæ sunt eæ Seriei portiones in quibus nulla reperitur imaginaria. Invento ergo valore ipsius z quantum satis est propiuquo, quemadmodum *Schotenius* postulat, reliqua methodo *Schoteniana*, perinde ac in illis Binomiorum extrahendorum generibus, transigentur.

Junii 21. 1677.

Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburgum, 12 Julii 1677 *data, cum D.* Newtono *communicanda. Hujus extat exemplar manu D.* Collins *descriptum, et impressa est a D.* Wallisio, *pag.* 652. Nº LXX.

Amplissime Domine,

Nuperas meas credo acceperis, nunc istas mature summitto, ne facilitate D. *Newtoni* abutamur. Rogaveram enim in prioribus, ut quædam suæ Epistolæ loca explicaret; nempe quomodo invenisset Theoremata, quod posito $z=ay+by^2+cy^3$ etc. sit $y=\frac{z}{a}-\frac{bz^2}{a^3}+\frac{2b^2-ac}{a^5}z^3$ etc. vel $y=\frac{z}{a}-\frac{b}{a^3}+\frac{3b^2-ac}{a^5}z^3$ etc. Nunc vero, relectis ejus literis, video id facile non tantum ex ejus extractionibus derivari, sed et altera illa methodo sub finem literarum ejus exposita inveniri, qua me quoque ** aliquando usum in veteribus meis Schedis reperio; sed cum in exemplo, quod forte in manus meas sum-

---

* Examinanda est hæc Methodus.

** D. *Leibnitius* Series plures reciprocas ante biennium ab *Oldenburgo* acceperat, Metho-

20.

seram, nihil prodiisset elegans, solita impatientia eam porro adhibere neglexisse.

Difficultatem moveram in præcedentibus literis circa æquationes impossibiles, quarum radices possibiles videntur inveniri per Series Infinitas; necdum vero illa sublata est, et meretur res excuti diligentius : illud tamen video, si in æquatione data $z = ay + by^2 + cy^3$ etc. literæ z et y sint indeterminatæ, tunc æquationem semper esse possibilem; sed si z esset determinata, rursusque in ipsis a vel b etc. lateret æquatio, posset esse impossibilis, et tamen per Seriem generalem aliqua prodire videretur radix possibilis; cujus difficultatis solutionem, re diligenter expensa, reperiri posse arbitror; sed nunc in ista accuratius inquirere non licet. Meretur autem explicari tum quomodo ex Seriebus agnosci possit æquationes esse impossibiles (quanquam id alias satis facile inveniatur) tum quomodo dignoscantur diversæ radices.

Præter ea quæ in superiore Epistola notavi, scilicet Methodum Tangentium inversam et Geometricam (saltem suppositis Curvarum analyticarum quadraturis) et alia id genus *, deest nobis circa Quadraturas ut scire certo possimus, an non quadratura figuræ alicujus propositæ reducatur ad quadraturam Circuli aut Hyperbolæ : nam pleræque figuræ hactenus tractatæ ope alterutrius quadrari potuerunt. Quod si demonstrari potest (ut arbitror) quasdam figuras non esse quadrabiles nec per Circulum nec Hyperbolam, restat ut alias quasdam figuras primarias altiores constituamus, ad quarum quadraturam reducantur cæteræ omnes, quando id fieri potest. Hoc quandiu non fit hæremus, et sæpe per Seriem infinitam particularem quærimus, quod ad Circuli aut Hyperbolæ aut aliam notioris figuræ quadraturam reduci poterat. Crediderat *Gregorius* dimensionem Curvarum Hyperbolæ et Ellipseos non pendere a quadratura Circuli aut Hyperbolæ; ego vero reperi aliquam speciem Curvæ Hyperbolicæ quam ex data ipsius Hyperbolæ quadratura metiri possum : de cæteris nondum mihi liquet.

Hannoveræ 12 *Julii* 1677.

---

dum Serierum reciprocarum anno superiore *Newtonum* rogaverat, hoc anno acceptam ægre intellexerat, et intellectam se olim invenisse ex chartis suis antiquis mox didicit : Et quamvis Series pro Hyperbola et Circulo ante annos plures haberet, et hæc methodus ex arcu daret Sinum, ex Logarithmo daret numerum, et Serierum omnium exhiberet reciprocas; eandem tamen olim inventam neglexisse ut inutilem. Sic Methodum, quam diu desideraverat, rogaverat, acceperat et ægre intellexerat, vel primus vel saltem proprio marte scilicet invenit.

* Quod hic desideratur, *Newtonus* in Epistola sua novissima significavit se aliqua ex parte invenisse, et quod invenerat postea publicavit in Libro de Quadratura Curvarum.

Brevi postea, Autumno scilicet anni 1677, *mors* Oldenburgi *huic literarum Commercio finem imposuit. Deinde anno* 1682 (1) *Acta eruditorum* Lipsiæ *primum edita sunt, ejusque anni Mense* Februàrio *prodiit D.* Leibnitii Quadratura Arithmetica *Circuli scilicet et Hyperbolæ, quarum prior non differt a* Gregoriana *toties dicta, neque posterior ab ea Vicecomitis* Bronnkeri, *ante quatuordecim annos, in* Philosophicis Transactionibus *N°* 34 *pro mense* Aprilis 1668, *publicata. Non multo post, anno scilicet* 1684, *in iisdem Actis* Lipsicis *pro mense* Octobri, Calculi differentialis *Elementa primum edidit D.* Leibnitius *literis* G. G. L. *designatus. Anno autem* 1683 *ad finem vergente, D.* Newtonus *Propositiones principales earum quæ in* Philosophiæ Principiis Mathematicis *habentur* Londinum *misit, eædemque cum* Societate Regia *mox communicatæ sunt; annoque* 1686 *Liber ille ad Societatem missus est ut imprimeretur, proximoque anno* (2) *lucem vidit: et Exemplar ejus D.* Nicolao Fatio *datum est ut ad* Leibnitium *mitteretur. Deinde anno* 1688 *Epitome ejus in* Actis Lipsicis *impressa est: qua lecta D.* Leibnitius *Epistolam de lineis Opticis, Schediasma de resistentia Medii et motu Projectilium gravium in Medio resistente, et Tentamen de Motuum Cœlestium causis composuit, et* in Actis Lipsicis *ineunte anno* 1689 *imprimi curavit, quasi* * *ipse quoque præcipuas* Newtoni *de his rebus Propositiones invenisset, idque diversa methodo qua vias novas Geometricas aperuisset; et librum* Newtoni *tamen nondum vidisset.* N° LXXI.

Anno autem 1695 Opera Mathematica Celeberrimi *Wallisii* duobus Tomis *Oxonii* prodiere: et in Actis Eruditorum anni insequentis Mense *Junio*, habetur libri Epitome; in qua sequentia leguntur, pag. 257 et seq. N° LXXII.

Newtonianis *etiam seriebus jam in Anglicana editione expositis, adjicit*

(1) [Collins *mortuus est, et.*] Interpolation.

(2) [*Mense* Martio.] Interpolation.

* Hac licentia concessa authores quilibet inventis suis facile privari possunt. Viderat *Leibnitius* Epitomen Libri in *Actis Lipsicis*. Per commercium Epistolicum, quod cum Viris doctis passim habebat, cognoscere potuit Propositiones in Libro illo contentas. Si Librum non vidisset, videre tamen debuisset antequam suas de iisdem rebus in itinere scriptas compositiones publicaret. Dicunt aliqui falsas esse Tentaminis Propositiones 11, 12 et 15, et D. *Leibnitium* ab his per calculum suum deduxisse Propositiones 19 et 20 ejusdem Tentaminis. Talis autem calculus ad Propositiones prius inventas aptari quidem potuit, non autem inventorem constituere.

quædam quæ David Gregorius *Scotus Professor* Oxoniensis, *et* Archibaldus Pitcarnius *Medicinæ* Lugdini Batavorum *Professor, non abludentia attulerunt. Addit cap.* 95 *Algebræ pag.* 389 *apud exteros (ut verba ejus sonant) etiam* Leibnitium *et* Tschürnhausium *nonnihil ejusmodi præstitisse, et apud* Britannos Jacobum Gregorium *et* Nicolaum Mercatorem, *sed quæ sint ut plurimum nonnisi casus particulares intra ambitum generalem regularum* Newtoni. *Calculo quoque Differentiali* Leibnitii *affinem esse methodum Fluxionum* Newtoni (*in Principiis Naturæ Mathematicis primùm editam*) *tum utraque esse antiquiorem* Barrovii; *et omnes* Wallisianæ *Arithmeticæ Infinitorum superstrui, quæ* Cavallerii *Geometriam promovit, ut hic* Archimedeam. *Exhibet etiam Methodum quandam* Josephi Raphson *pro Infinitis Seriebus, libello* Londini 1690 *edito sub titulo Analyseos Æquationum universalis comprehensam. Cæterum ipse* Newtonus *non minus candore quam præclaris in rem Mathematicam meritis insignis,* * *publice et privatim agnovit,* Leibnitium *tum cum (interveniente celeberrimo Viro* Henrico Oldenburgo *Bremensi,* Societatis Regiæ Anglicanæ *tunc Secretario) inter ipsos (ejusdem jam tum Societatis Socios) commercium intercederet, id est jam fere ante annos viginti et amplius, Calculum suum Differentialem, Seriesque Infinitas et pro iis quoque Methodos generales habuisse; quod* Wallisius, *in præfatione Operum factæ inter eos communicationis mentionem faciens, præteriit, quoniam de eo fortasse non satis ipsi constabat. Cæterum Differentiarum consideratio* Leibnitiana, *cujus mentionem facit* Wallisius (*ne quis scilicet, ut ipse ait, causaretur de Calculo Differentiali nihil ab ipso dictum fuisse*) *meditationes aperuit, quæ aliunde non æque nascebantur. Est enim Differentia Analyticum quiddam et calculi capax, et quod rei caput est, Summæ reciprocum. Eaque demum ratione factum est, ut calculus Analyticus non minus in Geometria alteriore, quam* Cartesius *a suo calculo excluserat, quam in ordinaria ab ipso tractata procedat. Et quemadmodum* Apollonius *et alii Veteres habebant quidem proprietates ordinatarum pro lineis Conicis et aliis,*

---

* Methodum Differentialem *Moutoni* D. *Leibnitius* habuit anno 1673, et suam esse voluit: Methodum aliam Differentialem nondum habuit. Series postea habuit, sed quas anno 1675 ab *Oldenburgo* accepit, ab aliis prius accipere potuisset. Methodum generalem perveniendi ad ejusmodi Series anno proximo ab *Oldenburgo* petiit, a *Newtono* accepit, antea non habuit. Methodum extrahendi Radices in speciebus a *Newtono* simul accepit, qua Methodus ejus per Transmutationem figurarum nondum generalis, in Methodum quandam generalem evasit, sed inutilem: Per Extractiones solas res citius peragitur. Anno 1677 Methodum novam Differentialem habuit, ac tantam Methodi hujus antiquitatem Editores jactant, majorem non asserunt. Methodum generalem vel Serierum vel Differentialem, *Leibnitium* vel primum vel proprio marte invenisse *Newtonus* nondum agnovit publice

ex quibus formatæ sunt postea æquationes a Cartesio; *ita similiter lineæ, quas ipse* Cartesius, *quippe calculo suo intractabiles, a Geometria excluserat*, Leibnitiana *primum methodo æquationibus finitis sunt expressæ et sub leges Analyseos redactæ; qua ratione omnes earum proprietates Analytico jam calculo investigari possunt, prorsus ut in ordinariis. Et cum antea per viam figurarum et imaginationis etiam præstantissimi Geometræ faciliora tantum assequi in his potuerint, nunc ope hujus calculi non tantum priora illa primo velut obtutu patent, quæ tunc merito admirationi erant, sed et multo magis abstrusa deteguntur ad quæ imaginatio non pertingit, in quo consistit potissimus calculi Analytici usus. Cæterum ipsum celeberrimum* Wallisium, *quo est candore, non dubitamus etiam Nostratium meditationibus, si sufficientem earum habuisset notitiam, locum ampliorem in suo Opere daturum fuisse. Sed ipse queritur, ultima Algebræ suæ pagina, hæc nostra Eruditorum Acta, in quibus bona earum pars continetur, minus sibi fuisse visa : unde neque illa satis sibi cognita ait, quæ de Geometria Incomparabilium, vel Analysi Infinitorum, a* Leibnitio *data fuere, quæ libenter alioqui in suo quoque opere exhibiturus fuerit. Cæterum hac occasione et de* Nicolao Mercatore, *(quem* Wallisius *velut inter suos recensere videtur) notare voluimus*, Germanum *fuisse, et ex* Holsatia *oriundum, etsi in* Angliam *habitatum concesserit; eumque primum fuisse, quantum constet, qui Quadraturam publice dederit per Seriem infinitam, tametsi tunc quoque* Newtonus *in eadem ipso inscio incidisset, eaque multo longius produxisset.*

Excerpta ex Epistola D. J. Wallisii *ad D.* Leibnitium, Oxonii 1° *Decemb.* 1696 *data, qua respondetur ad ea quæ ex Actis Eruditorum modo descripsimus.* Nº LXXIII

Dum hæc scripturus eram ; ostendit mihi nonnemo, hesterno die, *Acta Lipsica*, pro mense *Junii* præsentis Anni 1696. Quorum Eruditus Editor dignatus est inibi amplam meorum Operum Mathematicorum (*Oxonii* editorum) mentionem facere. Quo nomine me ipsi obstrictum sentio, et gratias habeo.

Sed conqueri videtur (saltem subinsinuare) quod, quum *Newtoni* Methodos fusius exposuerim; de *Leibnitianis* parcius dixerim. At nolim ego Te (quem magni æstimo) a me quoquo modo læsum iri. Sed gratulor potius, Te, in tanta nobilitate positum, ad res nostras Mathematicas descendere voluisse. Et tantum abest ut velim ego Tibi quocunque modo iniquus esse, ut siqua ferat occasio, demerere malim.

Dum addit Eruditus Editor, Illas me forte præteriisse quod de illis mihi non satis constiterit; id omnino verum est.

Dicam utique quod res est (neque enim fateri pudet): Tuarum ergo rerum nihil (quod memini) vidi quicquam, præter hæc duo. Quorum alterum, illud est quod inter *Londinensium Collectiones Philosophicas* habetur (sed absque Demonstatione) ex *Actis Lipsicis* descriptum; De *Quadrato Diametri ad Aream Circuli*; ut 1 ad $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. in infinitum. Quod ego meis inserui (ut a * Te factum) ad Algebræ meæ Prop. 95.

Alterum est illud de *Testudine Quadrabili*; cujus ego (ut de Tuo) mentionem facio in Algebræ meæ postremo folio. Præter hæc duo, si plura noverim, non reticuissem.

Tuam *Geometriam Incomparabilium* vel *Analysin Infinitorum*, (quam ibidem a te memoratam dixi), ego nondum vidi; nec ejus quicquam vel de nomine ante inaudiveram, quam pront ibidem ad calcem Algebræ dictum est.

Neque *Calculi Differentialis* vel Nomen audivisse me memini, nisi postquam utrumque Volumen absolverant operæ, eratque Præfationis (præfigendæ) postremum folium sub Prelo, ejusque typos jam posuerant Typothetæ. Quippe tum me monuit amicus quidam (harum rerum gnarus) qui peregre fuerat, tum talem methodum in *Belgio* prædicari, tum illam cum *Newtoni* methodo Fluxionum quasi coincidere. Quod fecit ut (transmotis typis jam positis) id monitum interseruerim.

Sed ante monueram, Algebræ Prop. 95, pag. 389. (quod solum potui) *Leibnitium* et *Tschürnhausium* talia meditatos; sed quæ ego non videram. (Necdum vidi.) Et sicubi forte viderim literas *G. G. L.* nesciebam quem illæ virum indicabant.

Extant, credo, plura in *Actis Lipsicis*; sed quæ ego non vidi: Uti nec tu, credo, vidisti *Brounkeri Quadraturam Hyperbolæ*, quæ extat in Transactionibus *Londinensibus*. Mihique condonari potest, hac ætate, (qui annum Octogesimum superavi) si non omnia sciscitarer.

Noveram quidem jamdudum (et indicavi) de rebus ejusmodi nonnulla te meditatum esse; tibique cum *Newtono* (mediante *Oldenburgo*) intercessisse Literas quasdam tuas: Sed, quas ego non vidi, nec scio quales fuerint:

* Ignoravit *Wallisius Gregorium* hanc Seriem anno 1671 cum *Collinio*, *Oldenburgum* anno 1675 cum *Leibnitio* communicasse; et præterea *Leibnitium* in *Anglia* fuisse anno 1673. *Collinius* enim, *Leibnitio* tum non ignotus [1], ab anno 1670 Series a *Newtono* et *Gregorio* acceptas rogatus non rogatus liberrime nec sine jactantia communicavit, ut ex superioribus patet [2].

[1] [*Leibnitio* tum non ignotus.] Omission.

[2] [Et *Pellius* cui hæ series ignotæ non erant, cum *Leibnitio* de seriebus verba habuit.] Addition.

eratque *Oldenburgus* diu mortuus, ut non potuerim ab illo sciscitari. Rogabam quidem (per literas) *Newtonum* nostrum, ut si eas penes se haberet, earum mihi copiam faceret literarum; sed retulit ille, se non habere. (Et quidem periisse credo flammis inopinato correptas, cum pluribus *Newtoni* scriptis meliori luce dignis: et nisi per me stetisset, periissent etiam *Newtoni* literæ.) Eoque animo rogabam, ut tuas illas cum *Newtoni* literis junctim ederem. Idque etiamnum, si ferat occasio, facturus forte sum, modo mihi dignaberis earum copiam facere *.

Quod *Henricus Oldenburgus* fuerit *Bremensis*; et *Nicolaus Mercator Holsatus* (quod suggerit Eruditus Editor); omnino verum esse credo; saltem Anglos non fuisse satis novi (eosque propterea *Germaniæ* vestræ non invideo), adeoque non *Nostrates* dixi, sed *Apud Nos*: nec tamen ideo minus eos aut amavi, aut æstimavi. Nam mihi perinde est qua quis gente sit (*Tros Tyriusve foret, nullo discrimine*) modo sit vir bonus et bene meritus. Sed *apud Nos* diu vixerant; et quicquid hac in re fecerint, *apud Nos* factum est.

Quæ fusius exposui, ut sentias quam Tibi non iniquus fuerim, aut parum candidus.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad* Wallisium *scripta*, $\frac{19}{29}$ *Martii, ineuntis Anni* 1697. Nº LXXIV.

——Quoniam videris nonnulla, in Actis dicta, ita accepisse, quasi animi parum erga *Germanos* æqui accuseris, et quasi vicissim tua recensendo extenuentur: Putavi non ingratum Tibi fore, si Epistolam Dominis Editoribus Actorum scriberem (cujus hic exemplum addo); qua (si ipsis videretur) Actis iisdem inserta, satisfieri tibi, scrupulis illis sublatis, possit. [*Habetur in Actis Lipsicis pro mense Junio* 1697].

Ego qui Te magni facio, et publice professus sum quantum meo judicio Tibi debeat altior Geometria, æquissimum puto viris præclare, non de suo tantum seculo, sed et posteritate, meritis debitas gratias rependi. Ut autem animi mei certior esse possis, ecce verbo tenus transcripta quæ ipse de Tuis meritis Geometricis dixi, *Actorum Lipsiensium Mense Junio* 1686, *pag.* 298.

---

* Eas tandem obtinuit D. *Wallisius* e schediasmatis *Collinii* [1].

[1] [Alteras *Newtoni* olim acceperat ab *Oldenburgo*.] Addition.

« Paucis dicam, quid potissimum insignibus nostri seculi Mathematicis in « hoc Geometriæ genere mea sententia debeatur.

« Primum *Galilæus* et *Cavallerius* involutissimas *Cononis* et *Archimedis* « artes detegere cœperunt.

« Sed *Geometria Indivisibilium Cavallerii* Scientiæ renascentis non nisi « Infantia fuit. Majora subsidia attulerunt Triumviri celebres; *Fermatius*, « inventa methodo de *Maximis et Minimis*; *Cartesius*, ostensa ratione Lineas « Geometriæ communis (Transcendentes enim exclusit) exprimendi per « *Æquationes;* Et P. *Gregorius a S. Vincentio*, multis præclaris Inventis. « Quibus egregiam *Guldini* Regulam de *Motu Centri Gravitatis* addo.

« Sed et hi intra certos limites constitere; quos transgressi sunt *Hugenius* « et *Wallisius*, Geometria inclyti. Satis enim probabile est *Hugeniana* « *Heuratio*, et *Wallisiana Nelio* et *Wrennio* (qui primi Curvis æquales Rectas « demonstravere) pulcherrimorum inventorum occasionem dedisse. Quod « tamen meritissimæ laudi Inventionum nihil detrahit.

« Secuti sunt hos *Jacobus Gregorius Scotus* et *Isaacus Barrovius Anglus:* « qui præclaris in hoc genere Theorematibus sciêntiam mirifice locuple- « tarunt.

« Interea *Nicolaus Mercator Holsatus*, Mathematicus et ipse præstantissi- « mus *, primus (quod sciam) Quadraturam aliquam dedit per *Seriem In-* « *finitam.*

« At idem inventum non suo tantum Marte assecutus est, sed et univer- « sali quadam ratione absolvit, profundissimi ingenii Geometra *Isaacus* « *Newtonus*. Qui, si sua cogitata ederet, quæ illum adhuc premere intelligo, « haud dubie nobis novos aditus ad magna Scientiæ incrementa compen- « diaque aperiret. »

Quibus deinde nonnihil de iis addo, † quæ mea opera accessere; Præsertim dum novo Calculi genere effeci ut etiam Algebram transcendentia Analysi subjiciantur; et Curvas, quas *Cartesius* a Geometria male excluserat, suis quibusdam †† Æquationibus explicare docui. Unde omnes earum

* *Mercator* quadraturam D. *Brounkeri* per divisionem *Wallisianam* tantum demonstravit ut supra.

† *Leibnitius* recitando inventa nova Mathematica, prætermittit Methodum Fluxionum, quasi Analysis tota Infinitesimalis sola sua opera accesserat.

†† Annon *Newtonus* hujusmodi æquationes prius invenit, qui docuit Fluentem ex Æquatione Fluxionem involvente extrahere, et Curvas Mechanicas ad Æquationes Numero Terminorum Infinitas reduxit, pergendo ab hujusmodi æquationibus finitis? Annon tota Fluxionum Methodus inversa, ubi de Curvis agitur, pendeat ab hujusmodi Æquationibus ad Curvas applicatis?

proprietates certo calculi filo deduci possunt. Exemplo *Cycloidis*, cui Æquationem ibidem assigno, $y = \sqrt{2x - xx} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - xx}}$. Ubi $\int$ significat Summationem; et d, Differentiationem; x, Abscissam ex Axe inde a Vertice; et y, Ordinatam normalem.

De Te autem queri nunquam mihi in mentem venit; quem facile apparet nostra, in *Actis Lipsiensibus* prodita, non satis vidisse.

Quæ inter *Oldenburgum* et me commutatæ sunt Literæ, quibus aliqua accesserant a D. *Newtono* excellentis ingenii Viro, variis meis [1] itineribus et negotiis ab hoc studiorum genere plane diversis, vel periere ut alia multa, vel jacent in mole chartarum aliquando excutienda digerendaque, ubi a necessariis occupationibus vacatio erit; quam mihi tam subito quam vellem promittere non possum.

Ex Epistola Wallisii *ad D.* Leibnitium, *Apr.* 6. 1697. N° LXXV.

Vir Nobilissime Celeberrimeque,

Literas tuas humanissimas *Martii* $\frac{19}{29}$ *Hannoveræ* datas, accepi (et exosculatus sum) *Martii* 31 stilo nostro 1697; hoc est, *Apr.* 10. stilo novo. Mihique gratulor quod Nobilissimo Viro Ego Meaque non displicuerint. Veniam interim exorare debeo, si locorum distantia fecerit, ut eruditissima tua scripta et inventa minus ego sciverim aut intellexerim, quam vellem; et quidem, quis sit ille tuus *Calculus Differentialis* non satis mihi compertum sit; nisi quod mihi nuper nunciatum est, eum cum *Newtoni Doctrina Fluxionum* quasi coincidere.

Nec pudet me meam hac in parte ignorantiam fateri, qui jam ab aliquot annis contentus fuerim (hac ætate) *lampadem tradere;* aliisque permittere, ut promoveant ea quæ (siqua) ego non infeliciter detexerim.

Quod Literas scripseris (in mei gratiam) ad Editores *Actorum Lipsicorum,* favori tuo debeo, et grates habeo.

Quis eorum ille sit, qui mea scripta recensuit in *Actis Lipsicis* pro mense *Junii* 1696, Ego quidem non scio; sed ei gratias habeo. Neque enim est cur ego ei succensere debeam, si non (primo intuitu) statim perspexerit omnia quæ penitius rimanti occurrissent, aut etiam sint occursura. Sufficit enim

---

[1] [meis.] Omission.

instituto suo, ut summa quæque carpat et magis obvia; Lectoribus permittendo, si penitiora desiderent, apud Authores indicatos quærere. Nolim autem existimes quod in gentem vestram minus æquo sim animo; nam secus est, etc.

Ubi dicitur, *Nicolaum Mercatorem primum esse qui Quadraturam aliquam dedit per Seriem Infinitam*: Vide annon mea talis sit, Ar. Infin. Pr. 191.

$$\square = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \times \text{ etc.}}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 10 \times \text{etc.}}$$

Et Brounkeri $\square = 1 \cfrac{1}{2 \cfrac{9}{2 \cfrac{25}{2 \cfrac{49}{2 \cfrac{81}{2} \text{ etc.}}}}}$

Sed et omnes mearum tabellarum series, in Arithmetica infinitorum, sunt *Series infinitæ*; et earum plurimæ quales quæ Vobis dicuntur (novo nomine) Series *Transcendentales*.

Nolim utique ut Clarissimo Viro fraudi sit nova Compellatio. Nam quas ego vocaveram *Continuas Approximationes*, vocat *Jacobus Gregorius Series Convergentes*; et *Newtonus Series Infinitas*; sed res eadem est. Sic quod ego vocaveram *Centrum Percussionis*, vocat *Hugenius* (novo nomine) *Centrum Oscillationis*; sed eadem res est. Et *Fermatii Hyperbolæ infinitæ* eædem sunt cum meis *Seriebus Reciprocis*. Et *Galilæi Cycloides*, *Mersenni Trochoides*, mea *Cyclois*, et *Cusani* Curva (quocunque nomine dicatur) sunt res eadem. Sic Rectificata Curva *Nelii*, et Curva *Heuratii*, et Curva demum *Fermatii*, eadem est cum mea *Paraboloide Semi-cubicali*. Et Gallorum *Socia Cycloidis* est ea Curva quæ (mihi) terminat Figuram *Sinuum rectorum*. Et, ni fallor (sic saltem mihi nunciatum est) *Newtoni Doctrina Fluxionum* res eadem est (vel quam simillima) quæ vobis dicitur *Calculus Differentialis*: Quod tamen neutri præjudicio esse debet.

Nº LXXVI. *Ex Epistola D.* Leibnitii *ad* Wallisium *scripta*, 28 Maii 1697.

Methodum *Fluxionum* profundissimi *Newtoni*, cognatam esse Methodo meæ *Differentiali*, non tantum animadverti, *postquam opus ejus et tuum prodiit; sed etiam professus sum in *Actis Eruditorum*, et alias quoque monui.

---

* Quasi *Leibnitius* hoc non advertisset anno 1677, ubi primum incidit in Methodum *Newtoni*. Vide literas ejus supra impressas, p. 90, 91 [1]. Certe Methodum *Newtoni* ante annum 1671 inventam fuisse *Leibnitius* ex Literis ejus intellexerat, sed in Actis *Lipsiris* hoc nunquam

[1] *Id est*, pag. 148, 149.

Id enim candori meo convenire judicavi, non minus quam ipsius merito. Itaque communi nomine designare soleo † *Analyseos Infinitesimalis;* quæ latius quam Methodus *Tetragonistica* patet.

Interim, quemadmodum et *Vietæa* et *Cartesiana* methodus *Analyseos Speciosæ* nomine venit; discrimina tamen nonnulla supersunt: ita fortasse et *Newtoniana* et *Mea* differunt in nonnullis.

Mihi consideratio Differentiarum et Summarum in seriebus Numerorum, * primam lucem affuderat, cum animadverterem Differentias Tangentibus, et Summas Quadraturis, respondere. Vidi †† mox Differentias Differentiarum in Geometria *Osculis* exprimi. Et notavi mirabilem analogiam relationis inter Differentias et Summas, cum relatione inter Potentias et Radices. Itaque judicavi, præter affectiones quantitatis hactenus receptas $y, y^2, y^3, y^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{3}}$, etc. vel generaliter y^e, sive $[p^e]\ y$, vel potentiæ ipsius y secundum exponentem e; posse adhiberi novas Differentiarum vel Fluxionum affectiones, dy, d^2y, (seu ddy,) d^3y, (seu $dddy$,) imo utiliter etiam occurrit $d^{\frac{1}{2}}y$, et similiter generaliterque $d^e y$.

---

agnovit. Vide supra p. 70, 71, 72 [1]. Sic et se ab *Oldenburgo* Series *Newtonianas* et *Gregorianas* ineunte anno 1675 accepisse, statim oblitus est; p. 40, 41, 42, 45 [2]. Et Methodum Serierum se ab *Oldenburgo* postulasse et a *Newtono* accepisse, statim oblitus est; p. 45, 62, 98 [3]. Et problemata Tangentium inversa ab Æquationibus et Quadraturis pendere se primum negasse, et subinde a *Newtono* didicisse, statim oblitus est; p. 65, 85, 86, 93 [4].

† Methodum Fluxionum et Methodum Differentialem esse unam et eandem Methodum *Leibnitius* hic agnoscit, ideoque se communi nomine Analyseos Infinitesimalis designare solere, licet in nonnullis differre possint, ut Analysis speciosa *Vietæ* et ea *Cartesii* in nonnullis differunt. Quæritur quis sit Analyseos hujus Infinitesimalis inventor primus, et ecquid alter alterius inventis addiderit.

* Fatetur hic *Leibnitius* Methodum Tangentium per Differentias primam lucem ipsi affudisse, id est, Methodum quam *Fermatius*, *Gregorius*, *Barrovius* coluere, *Newtonus* p. 14, 15 [5], ad Quantitatum augmenta momentanea generaliter applicuit. Hancce Tangentium methodum *Leibnitius*, lectis *Newtonianis*, meditatur, p. 47, 71, 86, 87, 88 [6], generalem reddit, p. 88, 89 [7], et *Newtonianæ* similem esse statim videt, p. 90, 91, 93 [8].

†† *Fermatius* et *Schootenus* hoc antea viderunt, determinando Punctum flexus contrarii in Conchoide.

[1] *Id est*, pag. 126, 127, 128.

[2] *Id est*, pag. 94, 95, 96, 99.

[3] *Id est*, pag. 99, 117, 158.

[4] *Id est*, pag. 120, 143, 144, 152.

[5] *Id est*, pag. 67, 68.

[6] *Id est*, pag. 101, 127, 144, 145, 146.

[7] *Id est*, pag. 146, 147.

[8] *Id est*, pag. 149, 150, 151.

Hac jam Affectione admissa, † vidi commode per Æquationes exprimi posse quantitates quas a sua Analysi et Geometria excluserat *Cartesius*; et Curvas, quas ille non recte vocat *Mechanicas*, hac ratione calculo non minus subjici, quam ab ipso in Geometriam receptas. Et, quemadmodum Veteres jam Æquationes Curvarum *Locales* observaverant, sed *Cartesius* tamen utilem operam nobis navavit dum eas calculo suo expressit: ita putavi me non inutiliter facturum, si ostenderem Methodum Curvas ab ipso exclusas similiter per Æquationes exprimendi; quarum ope omnia de iis certo calculi filo haberi possint.

Et licet fatear, quemadmodum rem ipsam, in Æquationibus Curvarum Localibus facilioribus, calculo *Cartesii* expressam, jam tenebant Veteres; ita rem ipsam, meis Æquationibus Differentialibus facilioribus expressam, non potuisse Tibi aliisque egregiis Viris esse ignotam : non ideo minus tamen puto et *Cartesium* et *Me* aliquod utile præstitisse. Nam antequam talia ad constantes quosdam Characteres calculi analytici reducuntur, tantumque omnia vi mentis et imaginationis sunt peragenda, non licet in magis composita abditaque penetrare; quæ tamen, calculo semel constituto, lusus quidem jocusque videantur.

Unde jam mirum non est *, Problemata quædam, post receptum calculum meum, soluta haberi, quæ antea vix sperabantur : Ea præsertim quæ ad transitum pertinent a Geometria ad Naturam. Quoniam scilicet Vulgaris Geometria minus sufficit, quoties Infiniti involvitur consideratio; quam plerisque Naturæ operationibus inesse consentaneum est, quo melius referat Autorem suum.

Hugenius certe ††, qui hæc studia haud dubie profundissime inspexerat, multisque modis auxerat, initio parvi faciebat Calculum meum, nondum perspecta ejus utilitate. Putabat enim dudum nota sic tantum nove exprimi : prorsus quemadmodum *Robervallius* et alii, initio, *Cartesii* Curvarum

---

† *Leibnitius* hoc non vidit ante annum 1677. Scripsit enim anno 1676 inversa Tangentium Problemata, et alia multa ab æquationibus non pendere. Rescripsit *Newtonus* hujusmodi Problemata in potestate esse, nempe per Æquationes suas. Et tum demum *Leibnitius* a *Newtono* admonitus hæc vidit. Vide pag. 65, lin. 14 [1].

* Mirum est hæc a D. *Leibnitio* dici, qui ex Literis et Principiis *Newtoni* intellexerat Methodum solvendi hujusmodi Problemata *Newtono* ante annum 1671 innotuisse, et ipsum primum per hanc Methodum Problemata tractasse quæ ad transitum pertinent a Geometria ad Naturam.

†† *Hugenius* Literas, quæ inter *Newtonum* et *Leibnitium* mediante *Oldenburgo* intercesserant, nunquam vidit.

[1] *Id est*, pag. 120, lin. 6.

calculos parvi faciebant. Sed mutavit postea *Hugenius* sententiam suam, cum videret quam commoda esset hæc exprimendi ratio, et quam facile per eam res involutissimæ evolverentur. Itaque maximi eam a se fieri aliquot ante obitum annis, non tantum in privatis ad me aliosque literis, sed publice quoque est professus.

Cæterum *Transcendentium* appellationem, nequid a me præter rationem in phrasi Geometrica novari putes, sic accipio ut Transcendentes quantitates opponam Ordinariis et Algebraicis : Et Algebraicas quidem vel Ordinarias voco Quantitates, quarum relatio ad datas exprimi potest Algebraice; id est, per Æquationes certi gradus, primi, secundi et tertii, etc. quales quantitates *Cartesius* solas in suam Geometriam recipiebat : Sed *Transcendentes* voco, quæ omnem gradum Algebraicum transcendunt. Has autem exprimimus, vel per valores Infinitos, et in specie per Series (neque enim ipsas Series *Transcendentales* voco, sed Quantitates ipsis exprimendas), vel per Æquationes Finitas; easque vel Differentiales $\left(\text{ut cum Ordinata Cycloidis Methodo mea exprimitur per Æquationem } \dagger\, y = \int \frac{xdx}{\sqrt{ay - yq}}\right)$ vel Exponentiales, (ut cum incognita quædam x exprimitur per hanc Æquationem $x^x + x = 1$). Et quidem Transcendentium Exponentialem pro perfectissima habeo; quippe qua obtenta, nihil ultra quærendum restare arbitror; quod secus est in cæteris.

Primus autem, ni fallor, etiam *Exponentiales* Æquationes introduxi, cum Ignota ingreditur Exponentem. Et jam anno primo * *Actorum Lipsiensium*, specimen dedi in exemplo, quantitatis Ordinariæ *Transcendentaliter* expressæ, ut res fieret intelligibilior; Nempe, si quæratur $x^x + x = 30$, patet $x = 3$ satisfacere; cum sit $3^3 + 3 = 27 + 3 = 30$.

---

† Legendum $y = \int \frac{xdx}{\sqrt{ax - xx}}$. Idem sic designari potest $y = \frac{\dot{x}\dot{x}}{\sqrt{ax - xx}}$, vel sic $y = \frac{\dot{x}x}{\sqrt{ax - xx}}$. Et nota quod ubi Differentiæ referuntur ad summas, rectius dicerentur Partes. Sunt enim non Differentiæ Summarum sed Partes, et nullam relationem habent ad Summas, nisi quatenus sunt earum Partes.

* Imo Anno 1677, Vide pag. 94, 95 [1].

[1] *Id est*, pag. 154, 155.

N° LXXVII. *Ex Epistola* Wallisii *ad* Leibnitium, Julii 30, 1697.

Optaverim item ut Tibi vacet tuum *Calculum Differentialem*, et *Newtono* suam *Fluxionum Methodum*, justo ordine exponere; ut quid sit utrique Commune, et quid intersit Discriminis, et utramque distinctius intelligamus *.

N° LXXVIII. *In Dissertatione D.* Nicolai Fatii Duillierii, *R. S. S. de investigatione Geometrica* Lineæ Brevissimi descensus etc. Londini *Anno* 1699 *edita. pag.* 18, *hæc habentur.*

« *Newtonum* primum, ac pluribus annis vetustissimum, hujus Calculi « Inventorem, ipsa rerum evidentia coactus, agnosco : a quo utrum quic- « quam mutuatus sit *Leibnitius* secundus ejus Inventor, malo eorum, « quam meum, sit Judicium, quibus visæ fuerint *Newtoni* Literæ aliique « ejusdem Manuscripti Codices. »

Et respondit D. Leibnitius *in Actis Lipsiensibus Mense* Maii 1700.

« Certe cum Elementa calculi mea edidi anno 1684 **, ne constabat qui- « dem mihi aliud de Inventis ejus in hoc genere, quam quod ipse olim « significaverat in literis, posse se Tangentes invenire non sublatis Irratio- « nalibus; quod *Hugenius* quoque se posse mihi significavit postea, etsi « cæterorum istius calculi adhuc expers : sed majora multo consecutum « *Newtonum*, viso demum libro Principiorum ejus satis intellexi. Calculum « tamen differentiali tam similem ab eo exerceri, non ante didicimus, quam « cum non ita pridem magni Geometræ *Johannis Wallisii* operum volu-

* Ut *Leibnitius* Differentiam Methodorum exponat iterum rogat *Wallisius*, sed frustra.

** Constabat certe D. *Leibnitio*, jam ab anno 1677, Curvarum Quadraturas faciliores reddi, et Problemata Tangentium inversa D. *Newtoni* Methodis solvi; idque nonnunquam per quadraturas solas, nonnunquam per Methodos generaliores. Confer Literas ejus pag. 90, 91 [1], et seq. cum pag. 71, 72, 85, 86 [2], ut et cum pag. 30, lin. 15, 16 [3], et pag. 47, lin. 4, 8, 15 [4], etc.

[1] *Id est*, pag. 149, 150.

[2] *Id est*, pag. 127, 128, 143, 144.

[3] *Id est*, pag. 84, lin. 16, 17.

[4] *Id est*, pag. 100, lin. 16, 20, 27, etc.

« mina primum et secundum prodiere, *Hugeniusque* curiositati meæ favens « locum inde descriptum ad *Newtonum* pertinentem mihi mature trans- « misit. »

Et post aliqua (1) : « Quam [*Methodum*] ante Dominum *Newtonum* et me « nullus quod sciam Geometra habuit; uti ante hunc maximi nominis « Geometram, NEMO specimine publice dato se habere probavit : ante « Dominos *Bernoullios* et Me nullus communicavit. »

D. Fatio *autem Replicationem suam ad Editores* Lipsienses *ut publicaretur mittente, Hi, quasi lites aversati, eandem Actis suis inserere recusarunt. Vide* Act. Lips. Martii 1701, *pag.* 134.

Tandem ubi prodiere Newtoni *Libri de Numero Curvarum secundi generis, deque Quadratura Figurarum, Editores* Actorum Lipsiensium, *stylo* Leibnitiano, *Synopsin libri prioris his verbis concluserunt. Vide* Act. Lips. Januarii 1705: N° LXXIX.

*Cæterum autor non attingit Focos vel Umbilicos Curvarum secundi generis, et multo minus generum altiorum. Cum * ergo ea res abstrusioris sit indaginis et maximi tamen in hoc genere usus, tum ad descriptiones tum ad alias proprietates Curvarum, et doctrina hæc Focorum ab illustrissimo D.* † D. T. *profundius sit versata; supplementum ejus pro his Curvis ab ipsius ingenio expectamus.*

Dein libri alterius Synopsin sequentem (si Synopsis dici mereatur) eodem stylo subjunxerunt.

Ingeniosissimus deinde Autor antequam ad Quadraturas Curvarum (vel potius Figurarum Curvilinearum) †† *veniat, præmittit brevem* Isagogen. *Quæ* || *ut melius intelligatur, sciendum est cum magnitudo aliqua continue crescit, veluti*

---

(1) [*De Methodi hujus parte sublimiore verba faciens, addit.*] Interpolation.

* Compilatores Actorum in scribendis librorum Breviariis, a censuris temerariis abstinere debent. Ex hac censura patet animus scriptoris in D. *Newtonum*.

† Literis D. T. *Tschurnhausius* designatur.

†† Hæc *Isagoge* et Corollarium[1] Propositionis ultimæ scripta sunt ubi liber prodiit, reliqua ex MS. antiquo manibus amicorum trito impressa sunt.

|| Ut *Isagoge* melius intelligatur, *Leibnitius* describit calculum suum differentialem et omittit calculum *Newtonianum*, quem solum describere debuisset. Hoc fecit, non ut calculus *Newtonianus* in *Isagoge* traditus melius intelligatur, sed ut rejiciatur.

[1] [Scholium.] Correction.

Linea (exempli gratia) crescit fluxu Puncti quod eam describit *, *incrementa illa momentanea appellari differentias, nempe inter magnitudinem quæ antea erat, et quæ per mutationem momentaneam est producta; atque hinc natum esse Calculum Differentialem, eique reciprocum Summatorium; cujus elementa ab inventore D.* Godefrico Guilielmo Leibnitio *in his Actis sunt tradita, variique usus tum ab ipso, tum a D. D. Fratribus* Bernoulliis, *tum et D. Marchione* Hospitalio, *(cujus nuper extincti immaturam mortem omnes magnopere dolere debent, qui profundioris doctrinæ profectum amant) sunt ostensi. Pro differentiis igitur* Leibnitianis *D.* Newtonus ** *adhibet, semperque adhibuit,* Fluxiones, quæ sunt quam proxime ut Fluentium augmenta æqualibus temporis particulis quam minimis genita; *iisque tum in suis Principiis Naturæ Mathematicis, tum in aliis postea editis eleganter est usus, quemadmodum et* Honoratus Fabrius *in sua Synopsi Geometrica, motuum progressus* Cavallerianæ *methodo substituit.* Subinde Editores vice Symbolorum *Newtoni* describunt symbola *Leibnitii*, et postea librum *Newtoni* sic breviter attingunt. *Cum regressus a Differentiis ad quantitates, vel a quantitatibus ad summas, vel denique a Fluxionibus ad Fluentes non semper Algebraice fieri possit, ideo quærendum est, tum quibus casibus Quadratura Algebraice succedat, tum quomodo Algebraico successu deficiente aliquid subsidiarium adhiberi queat. In utroque enim a D.* Newtono *est utilissime laboratum, tum alias, tum in hoc Tractatu de Quadraturis, ubi Series adhibet Infinitas quæ eo casu quo abrumpuntur seu finiuntur, quæsitum Algebraice exhibent. De* † *quo etiam dictum est nuper in recensione Tractatus D.* Cheynæi, *Medici* Scoti Londini *degentis. Conferri etiam potest Tractatus D.* Craigii Scoti *de Quadraturis, et ejusdem Theorema ad Quadraturas pertinens, nuper in his Actis exhibitum; quæ faciunt etiam ut ipsis Theorematis* New-

* Incrementa illa momentanea *Newtonus* momenta, *Leibnitius* postea differentias vocavit. Et inde natum est nomen Calculi differentialis.

** Sensus verborum est quod *Newtonus* Fluxiones Differentiis *Leibnitianis* substituit, quemadmodum *Honoratus Fabrius* motuum progressus *Cavallerianæ* methodo substituerat; id est, quod *Leibnitius* Author primus fuit hujus Methodi, et *Newtonus* eandem a *Leibnitio* habuit, substituendo Fluxiones pro Differentiis.

† Sensus est quod, Quæ *Newtonus* habet in hoc Tractatu de Quadraturis, et speciatim de Quadraturis illis ubi Series abrumpuntur vel finiuntur a *Cheynæo et Craigio* prius dicta sunt, et in his Actis nuper exhibita; quæ quia multa sunt, faciunt ut a *Newtonianis* recensendis Editores Actorum supersedeant. Et eodem sensu D. *Leibnitius* ad Secretarium Societatis Regiæ nuper scripsit, *suum cuique hic redditum esse*, quasi secundam *Newtoni* ad *Oldenburgum* Epistolam ad se missam et supra impressam nunquam legisset. Vide pag 72, 73, 74, 76[1].

[1] *Id est*, pag. 128, 129, 130, 133.

tonianis *recensendis supersedeamus, quia paucis exponi non possunt : quemadmodum nec ejusdem Theoremata quædam reductionis ad Quadraturas faciliores.*

His permotus D. Joannes Keill, *in Epistola* in Philosophicis Transactionibus *A. C.* 1708, *mensibus* Maio *et* Junio (1) *impressa, scripsit in contrarium, quod* Fluxionum Arithmeticam, sine omni dubio, primus invenit Dominus *Newtonus*, ut cuilibet ejus Epistolas a *Wallisio* editas legenti facile constabit. Eadem tamen Arithmetica postea mutatis Nomine et Notationis modo, a Domino *Leibnitio* in *Actis Eruditorum* edita est.

Epistola D. Leibnitii *ad D.* Hans Sloane *Regiæ Societatis Secretarium*, 4° Martii *S. N.* 1711 *data*. N° LXXX.

Gratias ago quod novissimum Volumen præclari Operis *Transactionum Philosophicarum* ad me misisti; quamvis nunc demum mihi *Berolinum* excurrenti redditum sit. Itaque excusabis quod pro munere superioris anni nunc demum gratiæ dudum debitæ redduntur.

Vellem inspectio Operis me non cogeret nunc secunda vice ad vos querelam deferre : Olim *Nicolaus Fatius Duillierius* me pupugerat in publico scripto, tanquam alienum Inventum mihi attribuissem. Ego eum in *Actis Eruditorum Lipsiensibus* meliora docui; et vos ipsi, ut ex Literis a Secretario Societatis vestræ inclytæ (id est, quantum memini, a Teipso) scriptis didici, hoc improbastis. Improbavit *Newtonus* ipse vir excellentissimus, (quantum intellexi) præposterum quorundam hac in re erga vestram gentem et se studium. Et tandem D. *Keillius* in hoc ipso volumine, mense *Sept. Octob.* 1708, pag. 185, renovare ineptissimam accusationem visus est, cum scripsit, *Fluxionum Arithmeticam a* Newtono *inventam, mutato nomine et notationis modo a me editam fuisse.* Quæ qui legit, et credit, non potest non suspicari alterius inventum a me larvatum subdititiis nominibus characteribusque fuisse protrusum. Id quidem quam falsum sit nemo melius ipso D. *Newtono* novit. Certe ego nec nomen Calculi Fluxionum fando audivi, nec Characteres quos adhibuit D. *Newtonus* his oculis vidi, antequam in *Wallisianis* Operibus prodiere. Rem etiam me habuisse, multis ante annis quam edidi, ipsæ literæ apud *Wallisium* editæ demonstrant. Quomodo ergo aliena mutata edidi quæ ignorabam.

Etsi autem D. *Keillium* (a quo magis præcipiti judicio quam malo animo

---

(1) [Septemb. et Octob.] Correction

peccatum puto) pro calumniatore non habeam; non possum tamen non ipsam accusationem in me injuriam pro calumnia habere. Et quia verendum est ne sæpe vel ab improbis vel ab imprudentibus repetatur; cogor remedium ab Inclyta vestrâ Societate Regia petere. Nempe æquum esse vos ipsi credo judicabitis, ut D. *Keillius* testetur publice, non fuisse sibi animum imputandi mihi quod verba insinuare videntur, quasi ab alio hoc quicquid est Inventi didicerim et mihi attribuerim. Ita ille et mihi læso satisfaciet, et calumniandi animum a se alienum esse ostendet; et aliis aliàs similia aliquando jactaturis frœnum injicietur. Quod superest vale et fave.

Dabam *Berolini* 4 *Martii* 1711.

Nº LXXXI. *Epistola D.* Johannis Keill, *A. M. ex Æde Christi* Oxon. R. S. *Socii, et jam Astronomiæ Professoris* Saviliani, *ad D.* Hans Sloane *M. D.* Regiæ Societatis *Secretarium, cum D.* Leibnitio *communicanda.*

Cum D. *Leibnitii* Epistolam mecum Vir Cl. communicare dignatus sis; ea etiam quæ mihi visum fuerit rescribere, ne graveris accipere. Sentio Virum egregium acerrime de me queri, quasi ei injuriam fecerim, et rerum a se inventarum gloriam alio transtulerim; fateor querelam hanc ideo mihi molestam esse, quod nolim ea sit de me hominum Opinio, quasi ego calumniandi studio, cuiquam in rebus Mathematicis versanti, nedum Viro in iisdem versatissimo, obtrectarem; certe nihil ab ingenio meo magis alienum est, quam alterius laboribus quicquam detrahere.

Agnosco me dixisse Fluxionum Arithmeticam a D. *Newtono* inventam fuisse, quæ mutato Nomine et Notationis modo a *Leibnitio* edita fuit; sed nollem hæc verba ita accipi, quasi aut Nomen quod Methodo suæ imposuit *Newtonus*, aut Notationis formam quam adhibuit, D. *Leibnitio* innotuisse contenderem; sed hoc solum innuebam, D. *Newtonum* fuisse primum inventorem Arithmeticæ Fluxionum, seu Calculi Differentialis; eum autem in duabus ad *Oldenburgum* scriptis Epistolis, et ab illo ad *Leibnitium* transmissis, indicia dedisse perspicacissimi ingenii viro satis obvia; unde *Leibnitius* principia istius Calculi hausit, vel saltem haurire potuit: At cum Loquendi et Notandi formulas, quibus usus est *Newtonus*, Ratiocinando assequi nequiret Vir illustris, suas imposuit.

Hæc ut scriberem impulerunt Actorum Lipsiensium Editores, qui in ea quam exhibent operis *Newtoniani* de Fluxionibus seu Quadraturis enarratione, diserte affirmant D. *Leibnitium* fuisse istius Methodi Inventorem, et

Newtonum aiunt pro Differentiis *Leibnitianis* Fluxiones adhibere, semperque adhibuisse. Id quidem in iisdem scriptoribus observatu dignum, quod Loquendi et notandi formam a *Newtono* adhibitam, in *Leibnitianam* passim in eadem enarratione transferunt; de Differentiis scilicet et Summis et calculo Summatorio loquuntur, de quibus est nullus apud *Newtonum* Sermo; quasi inventa *Newtoni Leibnitianis* posteriora fuerint, et a Calculo *Leibnitii* in Actis Lipsiensibus Anno 1684 descripto ortum derivarint. Cum revera *Newtonus*, ut ex sequentibus patebit, Fluxionum Methodum invenerit, octodecim saltem annos antequam *Leibnitius* quicquam de Calculo Differentiali edidisset, Tractatumque de ea re conscripserit; cujus cum specimina quædam *Leibnitio* ostensa sint, rationi non incongruum est, ea aditum illi ad Calculum Differentialem aperuisse.

Unde si quid de *Leibnitio* liberius dixisse videar, id eo animo feci, non ut ei quicquam eriperem, sed ut quod *Newtoni* esse arbitrabar, auctori suo vindicarem.

Maxima equidem esse *Leibnitii* in Rempublicam Literariam merita lubens agnosco; nec eum in reconditiore Mathesi Scientissimum esse diffitebitur qui ejus in Actis Lipsiensibus scripta perlegerit: cum autem tantas tamque indubitatas opes de proprio possideat, certe non video cur spoliis ab aliis detractis onerandus sit. Quare cum intellexerim populares suos ita illi favere, ut eum laudibus non suis accumulent; *haud præposterum in gentem nostram studium esse duxi*, si *Newtono* quod suum est tueri et conservare anniterer. Nam si Lipsiensibus fas fuerit aliena *Leibnitio* affingere, *Britannis* saltem ea quæ a *Newtono* erepta sunt sine crimine calumniæ reposcere licebit; itaque cum ad Regiam Societatem appellet Vir illustris, meque publice testari velit calumniandi animum a me alienum esse; ut Calumniandi crimen a me amoveam, mihi ostendendum incumbit D. *Newtonum* verum et primum fuisse Arithmeticæ Fluxionum seu Calculi Differentialis Inventorem; deinde ipsum adeo clara et obvia Methodi suæ indicia *Leibnitio* dedisse, ut inde ipsi facile fuerit in eandem Methodum incidere.

Sciendum vero primum est, Celeberrimos tunc temporis Geometras, Dominos *Franciscum Slusium*, *Isaacum Barrovium*, et *Jacobum Gregorium*, Methodum habuisse qua Curvarum Tangentes ducebant, quæ a Fluxionum Methodo non multum abludebat; et iisdem principiis innixa fuit. Nam si pro Litera *o*, quæ in *Jacobi Gregorii* Parte Matheseos Universali quantitatem infinite parvam repræsentat; aut pro Literis a vel e quas ad eandem designandam adhibet *Barrovius*; ponamus $\dot{x}$ vel $\dot{y}$ *Newtoni*, vel dx seu dy *Leibnitii*, in Formulas Fluxionum vel Calculi Differentialis incidemus, et

regressus quo a data Tangentium proprietate ad naturam Curvæ perveniebant, (quem Methodum Tangentium inversam nominabant), eadem plane res erat ac Methodus qua a Fluxionibus ad Fluentes revertitur : interim suam Methodum non ultra Fluxiones primas extendebant; neque eandem ad Quantitates Surdis aut Fractionibus involutas accommodare potuerunt. At prius quam quicquam de hoc argumento a summis hisce viris publico datum est, D. *Newtonus* Methodum excogitavit, priori quidem non dissimilem sed multo latius patentem, quæ non substitit ad Æquationes eas in quibus una vel utraque quantitas indefinita Radicalibus est involuta, sed absque ullo æquationum apparatu Tangentem confestim ducere monstrabat, Quæstiones de Maximis et Minimis eodem Artificio tractabat, et Speculationes de Quadraturis facilius explicuit. Hæc constant ex Epistola *Newtoni* ad D. *Collinium* data, *Decembris* Die 10, Anno 1672, et inter *Collinii* Chartas reperta.

Hæc Epistola habetur impressa pag. 29, 30 [1].

Ex hac Epistola clare constat D. *Newtonum* Methodum Fluxionum habuisse ante annum 1670, eodem nempe quo *Barrovii* Lectiones editæ sunt.

N° LXXXII. Anno 1669 misit *Newtonus* ad D. *Collinium* Tractatum de Analysi per Æquationes Infinitas; quem etiam inter schedas *Collinii* repertum D. *Jones* nuper edidit. Sub hujus fine habetur demonstratio Regulæ pro Quadraturis Curvarum, nata ex proportione Augmentorum nascentium Abscissæ et Ordinatæ, cum Abscissa sit z et ordinata $x^{\frac{p}{n}}$; quæ quidem demonstratio commune fundamentum est tam Doctrinæ Fluxionum, quam Calculi Differentialis : ex eo autem Tractatu non pauca amicis suis communicanda deprompsit *Collinius*. Unde certum est D. *Newtono* ante illud tempus Fluxionum Arithmeticam innotuisse. Præterea constat ex posteriore *Newtoni* ad *Oldenburgum* Epistola : « Eum suadentibus amicis circa annum 1671 Tractatum de hisce rebus conscripsisse; quem una cum Theoria Lucis et Colorum in publicum dare statuerat : scribitque *Oldenburgo* Series Infinitas non magnam ibi obtinuisse partem; seque alia haud pauca congessisse, inter quæ erat Methodus ducendi Tangentes quam solertissimus *Slusius* ante annos duos tresve cum *Oldenburgo* communicaverat; sed quæ generalior facta, non ad Æquationes, quæ Surdis aut Fractionibus involutæ sunt, hærebat; et eodem fundamento usum ad Theoremata generalia, Quadraturas Curvarum spectantia, pervenisse se ait *Newtonus*. Horum

[1] *Id est*, pag. 83, 84.

« unum Exempli loco in ipsa Epistola ponit; Seriem exhibens cujus ter-
« mini dant Quadraturam Curvæ, cum abscissa est *z* et Ordinatim-applicata
« $dz^{\theta} \times \overline{e + fz^{\eta}}|^{\lambda}$. » Quæ Series abrumpitur et terminis finitis Curvæ Quadraturam comprehendit, quandocunque illa finita æquatione exprimi potest. Hoc dicit esse primum Theorematum Generaliorum; unde sequitur eum alia ad Casus difficiliores et magis intricatos accommodata habuisse: est autem Theorema illud propositio V in Tractatu de Quadraturis. Eodem etiam spectat ejusdem Prop. VI, sed ad Casus magis implicatos se extendit. Propositiones Tertia et Quarta sunt Lemmata Theor. hisce demonstrandis præmissa, Secunda autem in Quadraturis propositio extat in Tractatu de Analysi per Æquationes Infinitas, et prima Propositio est ea ipsa, quam in dicta Epistola fundamentum Operationum vocat, et transpositis Literis celari tunc voluit. Scribit etiam *Newtonus* se dudum Theoremata quædam, quæ comparationi Curvarum cum sectionibus Conicis inserviant, in Catalogum retulisse, et Ordinatas Curvarum quæ ad eam normam comparari possunt, in eadem Epistola describit; quæ profecto eadem plane sunt cum iis, quas Tabula secunda ad Scholium Propositionis X in Tractatu de Quadraturis, exhibet; unde satis liquet Tabulam illam et Propositiones 7, 8, 9 et 10 quæ sunt in Tractatu de Quadraturis, (a quibus Tabula pendet) *Newtonum* dudum invenisse ante annum 1676, quo scripta est Epistola illa posterior. Cum vero, in prima ad *Oldenburgum* Epistola, dicit se ab ejusmodi studiis per Quinquennium abstinuisse, hinc satis clare colligi potest, Propositiones in Tractatu de Quadraturis a D. *Newtono* inventas fuisse, quinquennio saltem antequam Epistolæ illæ ad *Oldenburgum* scriptæ essent, totamque illam de Fluxionibus Doctrinam, ante illud tempus ulterius a *Newtono* provectam esse, quam ad hunc usque diem a quoquam alio factum est sub nomine Calculi Differentialis. Certe neminem novi qui in hac provincia peragranda æquis passibus cum *Newtono* progressus sit: et pauci sunt, iique insignes Geometræ, qui prospicere queant, quousque ille in eadem provincia processerit. Præterea in posteriore illa ad *Oldenburgum* Epistola modum describit, quo in Seriem inciderit cujus termini Fluxiones seu Differentias quantitatum in infinitum exhibent; quæ postquam inventa esset, dicit Pestem ingruentem ipsum coegisse hæc studia deserere et alia cogitare. At Pestis illa contigit Annis 1665 et 1666; unde patet, etiam ante illud tempus Fluxionum Calculum D. *Newtono* innotuisse, hoc est duodecim saltem Annos antequam Calculum suum *Oldenburgo* communicavit *Leibnitius*; et novemdecim annos antequam Vir Illustris eandem in Actis Lipsiensibus edidit: et certe ante visas hasce duas *Newtoni* Epistolas, *Leibnitium* Calcu-

lum suum Differentialem habuisse nulla apparent vestigia. His omnibus rite perpensis certissime cuivis constabit, D. *Newtonum* pro vero Inventore Arithmeticæ Fluxionum habendum esse.

N° LXXXIII. Restat jam ut inquiramus quænam fuere Indicia *Leibnitio* a *Newtono* derivata, unde ei facile foret Calculum Differentialem elicere. Et primo, ut dixi, nullibi ostendit *Leibnitius* sibi notum fuisse Calculum Differentialem, ante visas has duas *Newtoni* Epistolas; imo ante illud tempus longiore usus est circuitu, cum res facilius multo et succinctius ex Calculo fluerent Differentiali. Hujus rei testis sit Epistola ad *Oldenburgum* data $\frac{18}{28}$ *Novembris* 1676, quæ in Operum *Wallisianorum* Tomo tertio etiam extat, in qua modum tradit exprimendi rationem subtangentis ad Ordinatam, in terminis quos non ingreditur Ordinata; ubi si loco y et dy ipsarum valores vinculo inclusos posuisset, statim scopum attigisset.

In prima Epistola quæ per *Oldenburgum* ad *Leibnitium* transmissa est, docuit *Newtonus* methodum qua quantitates in Series Infinitas reducendæ sint, *i. e.* qua quantitatum fluentium incrementa exhiberi possunt. In ipso enim initio Seriem ostendit, cujus Termini hæc incrementa repræsentant. Sed illa D. *Leibnitium* prorsus latebat, ante visam *Newtoni* Epistolam qua exponitur.

Sit o incrementum momentaneum quantitatis fluentis x, et $\frac{m}{n}$ index dignitatis ejusdem, et si pro x scribatur $x+o$, $x+2o$, $x+3o$, $x+4o$, etc. et Quantitates $\overline{x+o}|^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+2o}|^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+3o}|^{\frac{m}{n}}$, $\overline{x+4o}|^{\frac{m}{n}}$, etc. in Series Infinitas expandantur, habebimus totidem Series, quarum prima hæc est quæ sequitur, $x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} ox^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m^2-mn}{2n^2} oox^{\frac{m-2n}{n}} + \frac{m^3-3m^2n+2mn^2}{6n^3} ooox^{\frac{m-3n}{n}}$ etc.

In omnibus Seriebus primus terminus erit ipsa quantitas fluens $x^{\frac{m}{n}}$; et si prior quælibet Series a posteriore auferatur, habebimus harum Serierum differentias primas, in quibus omnibus primus terminus est Seriei primæ terminus primus quem ingreditur quantitas o, scil. $\frac{m}{n} ox^{\frac{m-n}{n}}$; et evanescente o fit ille terminus differentiis hisce primis æqualis; vel quod idem est, erit quantitas $\frac{m}{n} ox^{\frac{m-n}{n}}$ Fluentis incrementum primum.

Præterea si differentia quælibet prior a posteriori auferatur, deveniemus ad differentias secundas; quarum omnium terminus primus per 2 divisus, idem est cum termino secundo Seriei primæ quem ingreditur quantitas o: et evanescente o fiunt differentiæ illæ per Binarium divisæ singulæ æquales

termino illi primo Seriei, qui est $\frac{m^2 - mn}{2n^2} oox^{\frac{m-2n}{n}}$. Et eodem modo invenie-mus supra descriptæ Seriei terminum $\frac{m^3 - 3m^2n + 2mn^2}{6n^3} ooox^{\frac{m-3n}{n}}$, æqualem esse singulis differentiis tertiis per sex divisis. Et quilibet terminus ejusdem Seriei ad differentias respectivas semper habebit datam rationem, scil. terminus primus quem ingreditur o æqualis est differentiis primis, secundus est differentiarum secundarum pars media, tertius pars sexta differentiarum tertiarum etc. Hasce Series, quarum termini differentias omnes in infinitum repræsentant, invenit *Newtonus,* uti dixi, ante annum 1665; sed illæ ante visam *Newtoni* Epistolam, in qua exponitur, D. *Leibnitium* * latebant; nam ante illud tempus agnoscit *Leibnitius* semper ipsi necesse fuisse transmutare quantitatem irrationalem in Fractionem rationalem, et deinde, dividendo *Mercatoris* Methodo, Fractionem in Seriem reducere. Exinde etiam patet Seriem hanc differentias continentem non habuisse D. *Leibnitium*, quod postquam ipsi per *Oldenburgum* ostensa est, * rogat ut D. *Newtonus* ipsius originem sibi pandat.

Sit jam quantitas quælibet ex constanti et indeterminatis utcunque composita et vinculo inclusa, scil. $\overline{a + bx^c}|^{\frac{m}{n}}$, cujus differentia habenda est; constat per Regulam prius traditam quantitatis $a + bx^c$ differentiam esse $cbx^{c-1} o$ (posito quod o sit incrementum momentaneum Fluentis x) quare si pro $a + bx^c$ scribatur z, et pro $cbx^{c-1} o$ scribatur ω, erit $\overline{a + bx^c + cbx^{c-1} o}|^{\frac{m}{n}} = \overline{z + \omega}|^{\frac{m}{n}}$; quæ si per regulam *Newtoni* in Seriem expandatur, fit $z^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} \omega z^{\frac{m-n}{n}}$ + etc. cujus Seriei terminus $\frac{m}{n} \omega z^{\frac{m-n}{n}}$ est differentia prima quantitatis $z^{\frac{m}{n}}$ seu $\overline{a + bx^c}|^{\frac{m}{n}}$. Unde si loco z et ω restituantur ipsorum valores, $a + bx^c$ et $cbx^{c-1} o$, habebimus differentiam quantitatis $\overline{a + bx^c}|^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} cbx^{c-1} o \times \overline{a + bx^c}|^{\frac{m-n}{n}}$: vel si more *Leibnitiano* pro o ponatur dx, erit quantitatis $\overline{a + bx^c}|^{\frac{m}{n}}$ differentia $\frac{m}{n} cbx^{c-1}$ d$x \times \overline{a + bx^c}|^{\frac{m-n}{n}}$; ubi videmus quantitatem differentialem $\frac{m}{n} cbx^{c-1}$ dx extra vinculum semper manere. Atque hinc facile fuit D. *Leibnitio*, ope Regulæ *Newtonianæ*, differentias quan-

* Vide Epistolam *Leibnitii* ad *Oldenburgum* 27 *Augusti* 1676. pag. 63. lin. 10[1].

[1] *Id est*, pag. 117, lin. 5, infrà.

titatum omnium exhibere, utcunque quantitates fluentes Surdis aut Fractionibus sint implicatæ : id quod ante Epistolicum illud per *Oldenburgum* cum *Newtono* commercium ipsi minime notum fuit.

Quamvis hæc per se satis manifesta sunt Calculi Differentialis indicia; in secunda tamen Epistola quæ per *Oldenburgum* ad *Leibnitium* missa est, alias adhuc clariores describit *Newtonus* Methodi suæ notas. Dicit enim se habuisse methodum ducendi Tangentes, quam solertissimus *Slusius* ante annos duos tresve *Oldenburgo* impertitus est, ita ut habito suo fundamento nemo posset Tangentes aliter ducere, nisi de industria a recto tramite erraret. Quinetiam ibi quoque ostendit « Methodum hanc non hærere « ad æquationes quibus una vel utraque quantitas indefinita radicalibus « involuta est; sed absque ulla æquationum reductione (quæ opus ple- « rumque redderet immensum) Tangentem confestim duci, et eodem modo « in quæstionibus de Maximis et Minimis aliisque quibusdam rem sic se « habere. Fundamentum harum Operationum dicit esse satis obvium, « quod tamen transpositis literis in illa Epistola celare voluit : hoc etiam « adjicit, hoc Fundamento speculationes de Quadraturis Curvarum simpli- « ciores se reddidisse; et ad Theoremata quædam generalia se pervenisse « scribit. »

Cum vero Methodus *Slusiana* tunc temporis *Leibnitium* minime latere potuit; utpote in Actis Philosophicis *Lond.* publicata : Cumque *Newtonus* dicit eandem et sibi innotuisse, ex fundamento quo habito non hærebat ad æquationes radicalibus utcunque involutas; (in qua quidem tota rei difficultas posita est.) Cumque in priore Epistola Seriem descripsit, cujus ope differentiæ haberi possunt, ubi Fluentes Surdis aut Fractionibus utcunque implicatæ sunt : Cum denique idem Fundamentum ad Quadraturas Curvarum se applicuisse dicit; minime dubitandum est hæc omnia facem *Leibnitio* prætulisse, quo facilius Methodum *Newtoni* perspiceret.

N° LXXXIV. Quod si hæc non suffecisse videantur indicia, etiam ulterius processit *Newtonus*, et Exempla Methodi suæ dedit, et Regulam ostendit, qua ex datis quarundam Curvarum Ordinatis, earundem Areæ exhibentur in terminis finitis, cum hoc fieri potest; hoc est, in Stylo *Leibnitiano*, ipsi exempla tradidit quibus a Differentiis ad Summas pervenitur. Et a simplicioribus orsus, * proponit primo Parabolam cujus abscissa est z, et Ordinatim-applicata $\sqrt{az} = a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$, et Curvæ Area erit $\frac{2}{3}\,a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}$; hoc est, quando differentia

* Vide pag. 72 [1].

[1] *Id est*, pag. 128.

Areæ est $dz \times \sqrt{az}$, seu $a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} \times dz$, ostendit fore Aream $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}$; uude vicissim concluditur, si quautitas differentianda sit $a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}$, fore ejus differentiam $\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}dz$ seu $\frac{3}{2}dz\sqrt{az}$. Exemplum ejus secundum est Curva cujus abscissa est z, et Ordinatim-applicata $\frac{a^4 z}{\overline{c^2 - z^2}|^2}$: ubi ostendit *Newtonus* Curvæ Aream fore $\frac{a^4}{2c^2 - 2z^2}$, hoc est si differentia Areæ sit $\frac{a^4 z dz}{\overline{c^2 - z^2}|^2}$, ostendit Aream fore $\frac{a^4}{2c^2 - 2z^2}$. Uude vicissim si quautitas differentianda sit $\frac{a^4}{2c^2 - 2z^2}$, concludi potest differentiam fore $\frac{a^4 z \times dz}{\overline{c^2 - z^2}|^2}$. Vel si ejusdem Curvæ Ordinata sic enuncietur $\frac{a^4}{z^3 \times \overline{c^2 z^{-2} - 1}|^2}$, erit Area $= \frac{a^4 z^2}{2c^4 - 2c^2 z^2}$. Quare et vicissim, si quantitas differentiauda sit $\frac{a^4 z^2}{2c^4 - 2c^2 z^2}$, erit differentia $\frac{a^4 dz}{z^3 \times \overline{c^2 z^{-2} - 1}|^2}$.

Hinc ad exempla quædam difficiliora progreditur *Newtonus*, in iisque ostendit, quomodo ab Ordinatis, hoc est a Differentiis ad Summas perveniendum sit : ex quibus patebit, Curvam omnem quadrabilem fore, cujus Ordiuata in Differentiam Abscissæ ducta fit quantitatis alicujus differentia; et hinc innumera Curvarum geuera assignari possunt etiam Geometrice quadrabilia.

His indiciis atque his adjutum Exemplis, Ingenium vulgare Methodnm *Newtonianam* penitus discerneret; ita ut ne suspicari fas sit, eam acerrimum *Leibnitii* acumen posse latuisse; quem quidem usum fuisse his ipsis clavibus, ad hæc sua quæ feruntur inventa, aditum, etiam ex ipsius ore satis elucescit. Nam in Epistola ad *Oldenburgum* data, post explicatum Calculum Differentialem, exemplum addit, quod coincidere agnoscit cum Regula *Slusiana*, et postea addit. * « Sed Methodus ipsa priore nostra longe est « amplior, non tantum enim exhiberi potest cum plures siut literæ indeter- « minatæ quam x et y (quod sæpe fit maximo cum fructu) sed et tunc utilis « est, cum interveuiunt Irrationales, quippe quæ eam nullo morantur « modo, neque ullo modo necesse est Irrationales tolli; quod in Regula « *Slusii* necesse est, et Calculi difficultatem in immeusum auget. » Hæc omnia a *Newtono* prius in secunda ejus Epistola dicta sunt. Inde Exempla proponit, quorum quidem quod primum est, nescio quo fato, idem pror-

* Vide pag. 89, 90 [1].

[1] *Id est*, pag. 148, 149.

sus est ac id, quod, in ea Epistola quam *Leibnitio* transmiserat *Oldenburgus*, etiam primum protulerit *Newtonus*.

Mox addit Vir illustrissimus, « Arbitror quæ celare voluit *Newtonus* de « Tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit ex hoc Fundamento Quadraturas quoque reddi faciliores, me in hanc sententia « confirmat : nimirum semper Figuræ illæ quadrabiles, quæ sunt ad « Æquationem Differentialem. Æquationem Differentialem voco talem qua « valor ipsius dx exprimitur, quæque ex alia derivata est, qua valor « ipsius x exprimebatur. » Et paulo post, suam de hac re Sententiam plenius aperit, dicitque hanc unicam Regulam pro infinitis Figuris quadrandis inservire, diversæ plane naturæ ab iis quæ hactenus quadrari solebant. Quis est jam qui hæc perpendet et non videbit Indicia et Exempla *Newtoni* satis a *Leibnitio* perspecta fuisse; saltem quoad differentias primas? Nam quoad Differentias secundas, *Leibnitium* Methodum *Newtonianam* tardius intellexisse videtur, quod brevi forsan clarius monstrabo.

Interim facile illustri Viro assentior, et credo eum nec nomen Calculi Fluxionum fando audivisse; nec Characteres quos adhibuit *Newtonus* oculis vidisse, ante quam in *Wallisianis* operibus prodiere. Observo enim ipsum *Newtonum* sæpius mutasse nomen et Notationem Calculi. In Tractatu de Analysi Æquationum per Series Infinitas, incrementum Abscissæ per literam o designat : Et in Principiis Philosophiæ Fluentem quantitatem Genitam vocat, ejusque incrementum Momentum appellat : Illam literis majoribus A vel B, hoc minusculis a et b designat.

Id etiam ultra agnosco, inter cætera quæ de re Mathematica præclare meritus est *Leibnitius*, hoc itidem illi deberi, quod primus fuerit qui Calculum hunc typis edidit et in publicum produxit : itaque eo saltem nomine magnam apud Matheseos amantes inibit gratiam, quod Inventum ita nobile, et in multiplices usus deducendum, diutius eos noluerit latere.

Habes, Vir Cl. quæ de hoc argumento scribenda duxi, unde facile credo percipies, hoc qualecunque fuerit meum in Gentem nostram studium, ita parum præposterum fuisse, ut nihil omnino nisi quod *Newtoni* erat, *Leibnitio* detraxerim; nec dubito quin æqui rerum æstimatores uno ore fateantur me, uti nullo calumniandi animo, ita nec præcipiti Judicio, ea dixisse, quæ tibi tot argumentis luce meridiana clarius comprobavi.

Lecta est hæc Epistola coram Regia Societate, in Conventu die 24° Maii 1711 *habito, et ut Exemplar ejus D.* Leibnitio *mitteretur D.* Sloane *Secretario suo mandatum est.*

Epistola D. Leibnitii *ad D.* Hans Sloane *M. D. et R. S. Secr.* N° LXXXV.

Quæ D. *Johannes Keillius* nuper ad Te scripsit, candorem meum apertius quam ante oppugnant : quem ut ego hac ætate, post tot documenta vitæ, Apologia defendam, et cum homine docto, sed novo, et parum perito rerum anteactarum cognitore, nec * mandatum habente ab eo cujus interest, tanquam pro Tribunali litigem, nemo prudens æquusque probabit.

Quæ ille de meo rem cognoscendi modo suspicatur, haud satis exercitatus artis inveniendi arbiter, ipsius quidem docendi causa non est cur refellam : sed norunt † amici quam longe alio et ad alia proficuo itinere processerim. Frustra ad Exemplum Actorum Lipsiensium provocat, ut sua dicta excuset; in illis enim circa hanc rem quicquam cuiquam detractum non reperio, sed potius passim †† suum cuique tributum. Ego quoque et amici aliquoties ostendimus libenter a nobis credi, illustrem *Fluxionum* Autorem per se ad similia nostris fundamenta pervenisse. Neque eo minus Ego in Inventoris jura venio, quæ etiam *Hugenius*, judex intelligentissimus incorruptissimusque, publice agnovit : in quibus tamen mihi vindicandis ** non properavi, sed inventum [1] plusquam nonum in annum pressi, ut nemo me præcucurrisse queri possit.

Itaque vestræ æquitati committo, annon coercendæ sint vanæ et injustæ vociferationes, quas [2] ipsi *Newtono*, Viro insigni et gestorum optime con-

---

* Quasi Methodum *Moutoni*, et Series *Brounkeri*, *Wallisii* et *Gregorii* aliorumque Inventa non liceat propriis authoribus, nisi authoritate ab his accepta, asserere.

† Si Amici illi sunt *Germani*, invenit is hanc Methodum post reditum suum in *Germaniam*.

†† Scripserat *Keillius* in hæc verba. *Hæc ut scriberem impulerunt Actorum Lipsiensium Editores, qui in ea quam exhibent operis* Newtoniani *de Fluxionibus seu Quadraturis Enarratione, diserte affirmant D.* Leibnitium *fuisse istius Methodi Inventorem, et* Newtonum *aiunt pro Differentiis* Leibnitianis *Fluxiones adhibere semperque adhibuisse. Leibnitius* Editores hic palam defendit contra *Keillium*, quasi suum cuique reddidissent.

** In Epistola *Aug.* 27. 1676, properavit se coinventorem Methodi Serierum proponere. In Epistola *Junii* 21. 1677, properavit Methodum ut suam describere, de qua *Newtonus* tractatum ante annos quinque scripserat. In Schedis tribus anno 1689 impressis, properavit Propositiones principales *Principiorum Philosophiæ* ad Calculum suum revocatas in lucem edere, ut in Inventoris jura veniret.

[1] Probandum est.

[2] *Newtonus* et *Leibnitius* nec sunt idonei Judices nec Testes. Ex monumentis antiquis judicium ferendum est.

scio, improbari arbitror : ejusque Sententiæ suæ libenter daturum Indicia mihi persuadeo.

VALE.

Dabam *Hannoveræ*.

29 *Decemb.* 1711.

N° LXXXVI. Cum D. *Leibnitius* a D. *Keill* ut homine novo ad Societatem Regiam provocaret, Societas jussit monumenta antiquiora consuli, et Sociis aliquot qui his examinandis aptiores viderentur in mandatis dedit, ut in hanc rem inquirerent; et quæ in scriptis antiquis invenirent ad se referrent, una cum eorum Sententia. Et Arbitrorum Consessus collectionem ex Epistolis et aliis MSS. supra impressam ad Societatem retulerunt, una cum eorum Sententia sequente.

We have consulted the Letters and Letter-books in the Custody of the Royal Society, and those found among the Papers of Mr. John Collins, *dated between the Years* 1669 *and* 1677 *inclusive; and shewed them to such as knew and avouched the Hands of Mr.* Barrow, *Mr.* Collins, *Mr.* Oldenburg *and Mr.* Leibnitz; *and compar'd those of Mr.* Gregory *with one another, and with Copies of some of them taken in the Hand of Mr.* Collins; *and have extracted from them what relates to the Matter referr'd to us; all which Extracts herewith deliver'd to you, we believe to be genuine and authentick: And by these Letters and Papers we find,*

1. *That Mr.* Leibnitz *was in* London *in the beginning of the Year* 1673, *and went thence in or about* March *to* Paris, *where he kept a Correspondence with Mr.* Collins *by means of Mr.* Oldenburg, *till about* September 1676, *and*

Literas et Literarum Apographa tam quæ in Archivis Regiæ Societatis, quam quæ inter Chartas D. *Joannis Collinii* asservantur, et inter Annos 1669 et 1677 datæ sunt, inspeximus; et ex his, quæ D. *Barrowii*, D. *Collinii*, D. *Oldenburgi* et D. *Leibnitii* nomen ferebant, ex fide aliquorum qui eorum autographa probe noverant, ipsorum esse certo didicimus. Literas autem quæ *Gregorium* præ se ferebant auctorem, ipsius esse cognovimus fide *Collinii*, qui nonnullas earum *Gregorio* assignatas manu sua exscripserat. Ex his omnibus excerpsimus quæcunque ad rem nobis commissam pertinere videbantur; atque illa excerpta quæ una cum ipsis literis jam vobis traduntur, fideliter et accurate facta esse comperimus. Ex his autem Literis chartisque nobis constat.

I. D. *Leibnitium* anno ineunte 1673 *Londini* fuisse, unde Mense *Martio* vel circiter *Parisios* adiit, ubi Literarum commercium, habuit cum D. *Collinio* intercedente *Oldenburgo*,

then return'd by London *and* Amsterdam *to* Hannover: *And that Mr.* Collins *was very free in communicating to able Mathematicians what he had receiv'd from Mr.* Newton *and Mr.* Gregory.

II. *That when Mr.* Leibnitz *was the first time in* London, *he contended for the Invention of another* Differential Method *properly so call'd; and notwithstanding that he was shewn by Dr.* Pell *that it was* Mouton's *Method, persisted in maintaining it to be his own Invention, by reason that he had found it by himself, without knowing what* Mouton *had done before, and had much improved it. And we find no mention of his having any other* Differential Method *than* Mouton's, *before his Letter of the 21st of* June 1677, *which was a Year after a Copy of Mr.* Newton's *Letter, of the* 10th *of* December 1672, *had been sent to* Paris *to be communicated to him; and above four Years after Mr.* Collins *began to communicate that Letter to his Correspondents; in which Letter the Method of* Fluxions *was sufficiently describ'd to any intelligent Person.*

III. *That by Mr.* Newton's *Letter of the 13th of* June 1676 *is appears, that he had the Method of* Fluxions *above five Years before the writing of that Letter. And by his* Analysis per Æquationes numero Terminorum Infinitas, *communicated by Dr.* Barrow *to Mr.* Collins *in* July 1669, *we find that he had invented the Method before that time.*

IV. *That the* Differential Method *is one and the same with the* Method of Fluxions, *excepting the Name and Mode of Notation; Mr.* Leibnitz *calling*

usque in Mensem *Septembrem* 1676. Deinde per *Londinum* et *Amstelodamum Hannoveram* reversum esse. D. autem *Collinium* Mathescos peritis ea quæ a D. *Newtono* et *Gregorio* acceperat lubentissime communicasse.

II. D. *Leibnitium*, cum prima vice *Londinum* adiit, Methodi cujusdam Differentialis, proprie ic dictæ, se Inventorem perhibnisse: Et etiamsi D. *Pellius* ipsi monstraverat eandem antea à D. *Moutono* usurpatam fuisse, haud tamen sibi Inventoris jura asserere destituisse; cum quia proprio, ut aiebat, marte sua illa invenisset, nondum visis iis quæ *Moutonus* prius ediderat, tum quia plurima adjecisset. Neque usquam mentionem reperimus factam alterius Methodi ejus Differentialis præter istam *Moutoni*, ante Literas ejus 21 *Junii* 1677 datas; hoc est, Anno integro postquam D. *Newtoni* Epistola, 10 *Decembris* 1672 scripta, *Parisios* ipsi communicanda transmissa fuit; et quadriennio postquam D. *Collinius* eandem Epistolam cum Amicis communicare cœpit. In hac autem Epistola Methodus Fluxionum idoneo harum rerum cognitori evidenter satis describitur.

III. Ex literis D. *Newtoni* 13 *Junii* 1676 datis, manifestum est Fluxionum Methodum ipsi innotuisse, quinquennio prius quam Epistolam illam scriberet. Et ex *Analysi* ejus *per Æquationes numero Terminorum Infinitas*, quam D. *Barrovius* eum D. *Collinio* Mense *Julio* Anni 1669 communicavit, constat illum etiam ante illud tempus eandem excogitasse.

IV. *Methodus differentialis* una eademque est cum *Methodo Fluxionum*, si Nomen et Notationis modum exceperis. D. *Leibnitius* enim eas quantitates *Differentias* appellat quas

those Quantities Differences, *which Mr.* Newton *calls* Moments *or* Fluxions; *and marking them with the Letter* d, *a Mark not used by Mr.* Newton. *And therefore we take the proper Question to be, not who invented this or that Method, but who was the first Inventor of* the Method. *And we believe that those who have reputed Mr.* Leibnitz *the first Inventor, knew little or nothing of his Correspondence with Mr.* Collins *and Mr.* Oldenburg *long before; nor of Mr.* Newton's *having that Method above Fifteen Years before Mr.* Leibnitz *began to publish it in the* Acta Eruditorum *of* Leipsick.

For which Reasons, we reckon Mr. Newton *the first Inventor; and are of Opinion, that Mr.* Keill, *in asserting the same, has been no ways injurious to Mr.* Leibnitz. *And we submit to the Judgment of the Society, whether the Extract of Letters and Papers now presented to you, together with what is extant to the same purpose in Dr.* Wallis's *third Volume, may not deserve to be made Publick.*

D. *Newtonus Momenta* vel *Fluxiones:* easque nota litteræ [d] designat, quam non adhibet D. *Newtonus*. Rem proinde de qua agimus hanc autumamus esse; non uter hanc uter illam Methodum invenerit; sed uter Methodum ipsam, quæ unica est, prior invenerit. Simul illos qui D. *Leibnitium* pro Inventore primo habuere, de eo quod inter illum et D. *Collinium* olim intercesserat commercio parum aut nihil rescivisse opinamur; neque intellexisse D. *Newtonum* eadem Methodo usum esse, quindecim prius annos quam D. *Leibnitius* eam in Actis Eruditorum *Lipsiæ* evulgare cœpit.

Quibus perpensis, D. *Newtonum* primum esse hujus Methodi Inventorem arbitramur; atque ideo D. *Keillium*, eandem illi asserendo, nullo modo D. *Leibnitium* calumnia aut injuria affecisse. Judicio autem Societatis permittimus, utrumne Excerpta Literarum, reliquæque chartæ his subnexæ, una cum iis quæ extant in tertio Volumine Operum D. *Wallisii* huc spectantibus, simul imprimi et in publicum prodire mereantur.

His autem Die Aprilis 24° 1712 *acceptis, Societas Regia collectionem Epistolarum et MSS^torum^, et Sententiam Consessus imprimi jussit; ut et quicquid amplius ad hanc Historiam elucidandam idoneum in Actis Eruditorum occurreret.*

FINIS [1].

[1] Fin de l'edition de 1712. Ce qui suit appartient exclusivement à l'édition de 1722

APPENDIX.

His subjungere visum est judicium Mathematici 7 *Julii* 1713 datum, et charta volante sine nomine Autoris per orbem sparsum.

« Videtur *Newtonus* occasionem nactus, serierum opus multum promo-« visse per Extractiones Radicum quas primus in usum adhibuit, et qui-« dem in iis excolendis ut verisimile est ab initio omne suum studium « posuit, nec credo tunc temporis vel somniavit adhuc de calculo suo « fluxionum et fluentium, vel de reductione ejus ad generales operationes « Analyticas ad instar Algorithmi vel Regularum Arithmeticarum aut Al-« gebraicarum. Ejusque meæ conjecturæ [primum] validissimum indicium « est, quod de literis x vel y punctatis, uno, duobus, tribus, etc., punctis « superpositis, quas pro dx, ddx, d^3x ; dy, ddy, etc., nunc adhibet, in omni-« bus istis Epistolis [Commercii Epistolici, unde argumenta ducere volunt] « nec volam, nec vestigium invenias. Imo ne quidem in Principiis Naturæ « Mathematicis *Newtoni*, ubi calculo suo fluxionum utendi tam frequentem « habuisset occasionem, ejus vel verbulo fit mentio, aut notam hujusmodi « unicam cernere licet, sed omnia fere per lineas figurarum sine certa Ana-« lysi ibi peraguntur more non ipsi tantum, sed et *Hugenio*, imo jam antea « [in nonnullis] dudum *Torricellio*, *Roburvallio*, *Cavallerio*, aliis, usitato. Prima « vice hæ literæ punctatæ comparuerunt in tertio Volumine Operum *Walli-« sii* multis annis postquam Calculus differentialis jam ubique locorum « invaluisset. Alterum indicium, quo conjicere licet Calculum fluxionum « non fuisse natum ante Calculum differentialem, hoc est, quod veram « rationem fluxiones fluxionum capiendi, hoc est differentiandi differentia-« lia *Newtonus* nondum cognitam habuerit, quod patet ex ipsis Principiis « Phil. Math. ubi non tantum incrementum constans ipsius x, quod nunc « notaret per x punctatum uno puncto, designat per o [more vulgari, qui « calculi differentialis commoda destruit] sed etiam Regulam circa gradus « ulterioris falsam dedit [quemadmodum ab eminente quodam Mathema-« tico dudum notatum est]. . . . . Saltem apparet *Newtono* rectam « Methodum differentiandi differentialia non innotuisse longo tempore « postquam aliis fuisset familiaris. »

Hactenus Judicium.

24

ANNOTATIO.

Hæc omnia refutantur supra, *pag.* 13-16, 24-27, 28-31, 32-36, 37, 38, 43, 72, 74, 82, 84, 86, 116, 117, 128, 174, 175, 180.

Methodus fluxionum utique non consistit in forma symbolorum. Et *Keilius* hoc notaverat anno 1711 (*pag.* 31, 180). Pro fluxionibus ipsarum x, y, z, *Newtonus* quandoque ponit easdem literas punctis notatas $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$; quandoque easdem forma majuscula X, Y, Z; quandoque literas alias ut p, q, r; quandoque lineas exponentes ut DE, FG, HI (*pag.* 31). Et hoc *Newtonus* in hunc usque diem facit, ut videre licet in Libro de Quadraturis, ubi fluxiones in Propositione prima denotantur per literas punctatas, in ultima per Ordinatas Curvarum, in Introductione per alia symbola, dum *Newtonus* ibi Methodum Fluxionum explicat illustratque per exempla (*pag.* 31). Pro Fluxionibus D. *Leibnitius* nulla habet symbola. Is Momentorum sive Differentiarum symbola dx, dy, dz, primo cœpit adhibere Anno 1677; *Newtonus* momenta denotabat per rectangula sub fluxionibus et momento o cum Analysin suam scriberet, anno scilicet 1669 aut antea. *Leibnitius* symbolis $\int x, \int y, \int z$ pro summis Ordinatarum usus est jam inde ab Anno 1686: *Newtonus* in Analysi sua eandem rem denotavit inscribendo Ordinatam in Quadrato vel Rectangulo ad hunc modum $\boxed{\frac{aa}{64x}}$. Omnia *Newtoni* Symbola sunt in suo genere prima, et Symbola *Leibnitii* nondum obtinuerunt in Anglia (*pag.* 31).

In principiis naturæ Mathematicis *Newtonus* Analytico suo fluxionum calculo utendi non habuit frequentem occasionem. Nam liber ille inventus est quidem per Analysin, at scriptus est per Synthesin more veterum ut oportuit (*pag.* 34). At Analysis tamen ita elucet per Synthesin illam, ut *Leibnitius* ipse olim agnoverit, *Newtonum* non solum methodo sua tangentes duxisse, sed majora multo consecutum, viso demum Libro Principiorum, se satis intellexisse (*pag.* 43). Et in Epistola sua 28 *Maii* 1697 ad *Wallisium* scripta: *Methodum*, inquit, *profundissimi* Newtoni *cognatam esse methodo meæ differentiali non tantum animadverti, postquam opus ejus* [Principiorum scilicet], *et tuum prodiit, sed etiam professus sum in Actis Eruditorum et alias quoque monui. Id enim candori meo convenire judicavi non minus quam*

ipsius merito. Itaque communi nomine designare soleo Analyseos Infinitesimalis (*pag.* 38). Et alibi de sublimi quadam parte Methodi qua *Newtonus* solidum minimæ resistentiæ invenerat, hæc habêt verba. *Quam Methodum ante D.* Newtonum *et me, nullus quod sciam Geometra habuit, uti ante hunc maximi nominis Geometram nemo se habere* PROBAVIT (*pag.* 37). Et in Epistola ad *Newtonum Hannoveræ* data 7 *Mart.* 1693, ita scripsit : *Mirifice amplificaveras Geometriam tuis seriebus, sed edito Principiorum opere ostendisti patere tibi quæ Analysi receptæ non subsunt. Conatus sum ego quoque, notis commodis adhibitis quæ differentias et summas exhibent, Geometriam illam quam transcendentem appello, Analysi quodammodo subjicere, nec res male successit,* (*pag.* 26). Atque iterum in Responso ad D. *Fatium*, quod habetur in Actis Eruditorum *Maii* 1700, *pag.* 203, *lin* 21, id fassus est *Leibnitius* (*pag.* 26). Sed et Sectiones duas primas Libri secundi Principiorum verbis aliis (absque Symbolis differentialibus) composuit, et subjunxit; *se jam fundamenta Geometrica jecisse, et vias quasdam novas satis antea impeditas apperuisse; Omnia autem respondere suæ Analysi infinitorum, hoc est calculo summarum ac differentiarum* (*pag.* 36, 37). Et hoc fuit specimen omnium primum Methodi differentialis quod D. *Leibnitius* circa Problemata sublimiora Orbi literario exhibuit.

Literæ punctatæ prima vice comparuerunt, non (ut hic dicitur), in tertio Volumine Operum *Wallisii* quod prodiit Anno 1699, sed in secundo Volumine operum ejus quod prodiit Anno 1693 (pag. 10, 41), annis utique duobus antequam fama calculi differentialis ad aures *Wallisii* pervenerit, et annis tribus antequam Marchio Hospitalius Analysin suam infinite parvorum ediderit, qua Calculus differentialis ubique locorum invalescere cœpit (*pag.* 27, 28, 35, 36).

Newtonus nunquam mutavit literam o in literam $\dot{x}$ punctatam uno puncto, sed litera illa o usus est in Introductione ad Librum de Quadraturis, et adhuc utitur in eodem sensu ac sub initio, idque maximo cum fructu. Est enim o symbolum unicum quo *Newtonus* utitur pro quantitate infinite parva : At symbolum $\dot{x}$ quantitatem finitam designat (*pag.* 11, 12, 30-32).

Methodus Fluxiones omnes capiendi, seu differentiandi differentialia, habetur in Propositione prima libri de Quadraturis : et est verissima et optima. Eandem cum exemplis in differentiis primis et secundis *Wallisius* edidit in Tomo secundo Operum suorum anno 1693 ut supra, annis scilicet tribus antequam Regula *Leibnitii* differentiandi differentialia lucem viderit (*pag.* 11, 35, 36). Eandem Regulam *Newtonus*, Anno 1686 demonstravit Synthetice in Lem. 11, Lib. 11. Princip. (*pag.* 26) et posuit in Epistola sua ad *Oldenburgum* 24 *Octob.* 1676, tanquam fundamentum hujus methodi

de qua tum ante annos quinque scripserat (*pag.* 11). Et specimen ejusdem quoad Tangentes ducendas, posuit in Epistola sua ad *Collinium* 10 *Decemb.* 1672 (*pag.* 84). Et in eadem Epistola addidit Problemata de Curvarum curvatura seu Geometricarum seu Mechanicarum, per eandem methodum solvi (*pag.* 84). Ex quo manifestum est se jam tum suam methodum ad secunda ac tertia momenta extendisse. Cum enim areæ curvarum considerantur tanquam fluentes (ut in hac Analysi fieri solet), Ordinatæ exprimunt fluxiones primas, Tangentes autem datæ sunt per fluxiones secundas, et Curvaturæ per tertias (*pag.* 12). Et Anno 1669 in Analysi sua per series *Newtonus* dixit : *Momentum est superficies cum de solidis, et linea cum de superficiebus, et punctum cum de lineis agitur* : quod perinde est ac si dixisset : Cum solida considerantur tanquam fluentia, eorum momenta sunt superficies, et horum momentorum momenta (vel secunda solidorum momenta) sunt lineæ, et horum momenta (sive tertia solidorum momenta) sunt puncta; adeoque qua ratione momenta prima derivantur a fluentibus, secunda derivantur a primis, tertia a secundis, et sic deinceps in infinitum. Et Quomodo momenta prima derivantur a fluentibus, ostenditur in Analysi per series inveniendo Ordinatas Curvilinearum ex Areis (*pag.* 11-14, 74).

In eadem Analysi *Newtonus* posuit secundam Propositionem Libri de Quadraturis (*pag.* 175, *lin.* 10) dixitque *Curvarum areas et longitudines, id modo fiat, beneficio ejusdem methodi Analyseos exacte et Geometrice determinari* (*pag.* 72, *lin.* 26). Et Methodus hæcce *Newtono* innotuit annis aliquot antea testibus *Barrovio* et *Collinio* (*pag.* 83, *lin.* 1, 2, 3, 6), id est Anno 1666 aut antea. Hæc methodus aliquatenus explicatur in Epistola *Newtoni* ad *Oldenburgum* 24 *Octob.* 1676 data, ibique ex Propositione prima Libri de Quadraturis (illic ænigmatice descripta), consequi dicitur (*pag.* 127, 128) et in Propositione quinta et sexta Libri illius plenius explicatur; et hæ Propositiones ex Propositionibus quatuor primis Libri ejusdem consequuntur : ideoque Methodus fluxionum quatenus in Propositionibus quinque vel sex primis Libri de Quadraturis exponitur, *Newtono* innotuit Anno 1666 aut antea, testibus *Barrovio* et *Collinio*; ut et teste etiam *Wallisio* (*pag.* 27). Sed et Marchio Hospitalius pro *Newtono* testis est, qui utique dixit Librum Principiorum Philosophiæ fere totum esse ex hoc calculo (*pag.* 24) et *Leibnitium* in Methodum differentialem incidisse efficiendo ut Methodus tangentium *Barrovii* non hæreret ad radicales (*pag.* 24, 25). *Newtonus* enim per Epistolas 10 *Decem.* 1672, et 24 *Octob.* 1676. *Leibnitium* admonuit se hoc antea assecutum esse (*pag.* 84, 127).

Ex iis etiam quæ in Epistola ad *Oldenburgum* 24 *Octob.* 1676 data de Ta-

bulis figurarum curvilinearum in Scholio Propositionis decimæ Libri de Quadraturis positarum dicuntur, liquet Methodum fluxionum et momentorum quatenus in decem primis Libri illius Propositionibus habetur, diu ante annum 1676 *Newtono* innotuisse (*pag.* 175). Id quod etiam colligi potest ex Corol. 2 Prop. X. Libri de Quadraturis, quod utique in Epistola *Newtoni* ad *Collinium Nov.* 8, 1676 data, et Anno 1711 a *Jonesio* edita, descriptum habetur.

FINIS [1].

[1] Fin de l'édition de 1722.

PIÈCES JUSTIFICATIVES ET DOCUMENTS.

PREMIÈRE PARTIE.

SUPPLÉMENT AU COMMERCIUM EPISTOLICUM.

PIÈCES JUSTIFICATIVES ET DOCUMENTS.

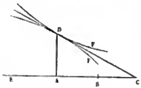
PREMIÈRE PARTIE.

SUPPLÉMENT AU COMMERCIUM EPISTOLICUM.

Excerpta ex Epistolâ Renati Francisci Slusii [1] *ad* Oldenburgum[2], *anno* $167\frac{2}{3}$ 17 *Jan.* Leodii *datâ. Integra legitur in Trans. philos.*, n° 90, *pag.* 5143 *et seq.* [3]

Methodum meam ducendarum ad curvas quaslibet Geometricas tangentium mitto ad Te, et virorum doctissimorum *R. Societatis* censuræ submitto. Brevis mihi visa est ac facilis, quippe quam puer αγεωμετρητοσ doceri possit, et quæ absque ullo calculi labore ad omnes omnino lineas extendatur : malo tamen aliis talem videri quàm mihi, cùm in rebus nostris cæcutire plerumque soleamus.

Data sit quælibet curva DF cujus puncta omnia referantur ad rectam quamlibet datam EAB per rectam DA; sive EAB sit diameter seu alia quælibet, sive etiam aliæ simul lineæ datæ sint, quæ, vel quarum potestates æquationem ingrediantur; parùm id refert.



In æquatione analytica, facilioria explicationis causâ, DA perpetuò dicatur *v*, BA *y*. EB verò et aliæ quantitates datæ *consonantibus* exprimantur. Tum supponatur ducta DC, tangens curvam in D, et occurrens EB productæ, si opus sit, in puncto C; et CA perpetuò quoque dicatur *a*. Ad inveniendam AC vel *a*, hæc erit *Regula generalis :*

1. Rejectis ab æquatione partibus, in quibus *y* vel *v* non invenitur; statuantur

[1] Sluze, chanoine de Liège, né en 1623, mort en 1685.

[2] Oldenbourg, né à Brême en 1626, mort en septembre 1677.

[3] Cette lettre, où la règle des tangentes est exactement donnée dans son application aux équations rationnelles, n'a été rappelée que pour mémoire à la page 84 du *Commercium*. Dans la trop célèbre lettre du 10 décembre 1672, Newton semble avoir cherché à égarer le lecteur, tout en évitant de se compromettre sérieusement : « Multiplica æquationis terminos per QUAMLIBET progressionem arithmeticam juxta dimensiones *y*..... UT et juxta dimensiones *x*..... » Il faut certainement beaucoup de réflexion pour conclure de là que la raison de la progression doit être la même dans les deux cas. [F. L.]

ab uno latere omnes in quibus est y, et ab altero illæ in quibus habetur v, cum suis signis + vel —. Hoc dextrum, illud sinistrum latus, facilitatis causâ vocabimus.

2. In latere dextro, præfigatur singulis partibus exponens potestatis quam in illis obtinet v; seu, quod idem est, in illum ducantur partes.

3. Fiat idem in latere sinistro, præponendo scilicet unicuique illius parti Exponentem potestatis quam in illa habet y. Sed et hoc amplius : unum y in singulis partibus vertatur in a.

Aio æquationem sic reformatam modum ostendere ducendæ Tangentis ad punctum D datum. Cùm enim eo dato, pariter datæ sint y et v, et cæteræ quantitates, quæ consonantibus exprimuntur; a non poterit ignorari.

Si quid forte sit obscuritatis in *regula*, aliquot exemplis illustrabitur :

. . . .

Exempl. 3.

. . . . . Aliqua [difficultas] fortasse in illis occurret, quarum partes quædam constant ex productis y in v : ut yv, y^2v, $-y^3v^2$, etc. Sed hæc quoque levis est, ut exemplis patebit. Detur enim $y^3 = bv^2 - yv^2$. Nihil ab illâ rejiciendum erit, cùm in singulis ejus partibus reperietur y vel v.

Sed ut ex regulæ præcepto disponatur, bis sumendum erit yv^2, et statuendum tam in latere dextro, in quo sunt partes quæ habent v, quàm in sinistro, cujus partes habent y; quando quidem yv^2 tam y quam v contineat. Faciendum igitur erit $y^3 + v^2y = bv^2 - yv^2$.

Tum mutatâ, ut prius, hac æquatione in aliam

$$3y^2a + v^2a = 2bv^2 - 2yv^2, \text{ dabitur } a = \frac{2bv^2 - 2yv^2}{3y^2 + v^2}.$$

Ita enim intelligenda est regula, ut nempe in latere non consideretur potestas ipsius v, ideoque ipsi yv^2 Exponens v^2 præfigi non debeat, sed tantum ipsius y: sicut contrà ab alio latere, in yv^2 considerari non debet potestas ipsius y, sed v tantum, eique suus Exponens præponi. . . . .

Cæterum, quoniam hactenus supposuisse videmur Tangentem versùs partes B ducendam esse, cùm tamen ex datis accidere possit, ut vel parallela sit ipsi AB, vel etiam ducenda ad partes contrarias; definiendum nunc superest, quomodo hæc casuum diversitas in æquationibus distinguatur. Factâ igitur fractione pro a, ut in exemplis supra adductis, considerandæ sunt partes tam Numeratoris quam Denominatoris, et eorum signa.

Suit l'énumération des différents cas.

Quomodo verò ex doctrinâ Tangentium constituantur æquationum limites, non est ut pluribus exponam, cùm evidens esse existimem, maximam vel minimam applicatarum, vel utramque simul, determinari à Tangente parallela : de quo et aliàs ad Te scripsi, et aliquid etiam attigi *Miscellaneorum* [1] *caput* ubi et, quâ ratione

[1] *Renati Francisci Slusii Mesolabum seu duæ mediæ proportionales inter extremas datas per*

flexus contrarii curvarum ex Tangentibus inveniantur, ostendi[1]. Eadem ratione reperitur quoque μοναχοσ λογοσ, ut vocat Pappus, et multa alia, quæ si explicare vellem, liber mihi scribendus esset.

. . . .

Addo tantùm, me Regulæ meæ *Demonstrationem*[2] habere facilem, et quæ solis constat Lemmatibus; quod mirum Tibi fortasse videbitur.

Epistola Slusii *ad* Oldenburgum, *anno* 1673, 3 *Maij* Leodii *data. Impressa legitur in Phil. Trans.*, n° 95, *pag.* 6059.

De clarissimi viri [Newtoni[3]] Methodo nihil aliud dicere possum, nisi mihi videri meam[4] esse, quà nempe tot ante annos usus sim, et cujus ope flexus curvarum contrarios ac Problematum limites ostendi tum in *Miscellaneis* meis, tum etiam in literis, si rectè memini, olim ad Te datis. Quà vià in illam inciderit, et quomodo illam demonstret vir doctissimus, ab ipso intelligere poteris : ergo sanè paucis, ut aliàs ad Te scripsi, et vulgò notis Lemmatibus rem absolvo; atque, ut candidè Tecum agam, ecce ipsa Lemmata :

1. Differentia duarum dignitatum ejusdem gradûs, applicata ad differentiam laterum, dat partes singulares gradûs inferioris ex binomio laterum, ut $\frac{y^3 - x^3}{y - x} = y^2 + yx + x^2$. Legitur hoc apud plerosque et facilè ostenditur.

2. Tot sunt partes singulares ex binomio in gradu quolibet, quot unitates habet Exponens dignitatis immediatè superioris; tres nimirum in Quadrato, quatuor in Cubo, etc. Et hoc vulgò notum.

3. Si quantitas eadem applicatur ad duas alias, quarum ratio data sit, Quotientes erunt reciprocè in eadem ratione data. Quod quidem evidens est vel cuilibet Arithmeticæ candidato.

His Lemmatibus methodus mea demonstratur : nec multum temporis Tibi erit

---

circulum et per infinitas hyperbolas, vel ellipses, et per quamlibet exhibitæ, ac problematum omnium solidorum effectio per easdem curvas.

Accessit pars altera de Analysi, et Miscellanea.

Leodii Eburorum. Apud Guilielmum Henricum Streel; 1668 : in-4°.

Le *Mesolabum* a été publié seul pour la premiere fois en 1659.

[1] *Voyez* Slusii *Miscellanea*, caput V : de puncto flexûs contrarii in conchoide Nicomedis prima.

[2] Non dubitamus quin rogatu nostro Illustris et Candidus hic Author Demonstrationem hic indigitatam Nobis etiam brevi sit communicaturus. [Note d'Oldenbourg.]

[3] Subticui viri nomen offensionis evitandæ causâ. — *Ex epistolà* Oldenburgi *ad* Slusium *superiùs impressâ. Voyez* n° XXIX, *pag.* 85.

[4] Newton reconnut la priorité des droits de Sluze à la règle des Tangentes, apres avoir reçu une lettre de Collins à la date du 18 juin 1673. Cette lèttre n'a pas été insérée au *Commercium Epistolicum*, sans doute *offensionis evitandæ causà :* je la reproduis d'après Wallis. [F. L.]

impendendum, ut demonstrationem ex illis concinnes, cùm eo ordine à me disposita sint, qui ad illum quasi manu ducit. Plura scribere me vetat temporis brevitas. Vale, meque ut soles ama.

Epistola D. Johannis Collinii[1] *ad D.* Isaacum Newton, *Matheseos Professorem Cantabrigiæ* 18 *Junii* 1673 *data. Latine reddita. Excerpta è* J. Wallis *operum Mathematicorum volumine tertio*[2].

Quod ad *Slusii Methodum de Tangentibus* spectat : erat ea ab ipso bene intellecta, quum suum *de Mesolabio* librum edidit. Sed noluit tunc publici juris facere, eo quod nollet Amico suo *Angelo Riccio*[3] prævenire. Qui tamen postea (declinans ipse studia mathematica), petebat à *Slusio* ut vellet eam edere. Ille autem, cum non vacaret ea de re fuse scribere, pollicitus est eam D. *Oldenburgo* transmittere, ut *Transactionibus Philosophicis* insereretur. Ante vero quam huc appulerit, scribebam ego ad Te, ut intelligerem quid ea de re tu noveris. Tuumque responsum cum D. *Oldenburgo* communicabam, ut ipse D. *Slusio* transmitteret. Ut sciat ipse, rem eam esse apud Anglos cognitam; utut forte non tam diu nec tam mature, ut ipsi fuerit.

Excerpta ex Epistola D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *anno* 1674, 8 Decemb. *data. Fragmenta leguntur superius impressa, n°* XXXIV. *Omissa quæ ad rem spectant restituuntur.*

Quod vero ais neminem hactenus dedisse progressionem numerorum rationalium, cujus in infinitum continuatæ summa sit *exacte* æqualis circulo, id vero Tibi tandem feliciter successisse; de eo quidem Tibi gratulor, sed adjungam oportet, quod nuper à viro de rebus his sollicito accepi : supra dictum nempe *Gregorium* in eo jam esse, ut scripto probet, *exactitudinem* illam obtineri non posse. Quod tamen minime à me dictum velim, ut ingenium studiumque tuum sufflaminem, sed pro meo in Te affectu cautum reddam, ut talia scilicet probe tecum volvas, revolvasque priusquam prælo divulges[4].

---

[1] Jean Collins, né en 1624, mort le 10 novembre 1683.

[2] Johannis Wallis S. T. D. Geometriæ Professoris Saviliani, in celeberrima academia Oxoniensi operum Mathematicorum volumen tertium..... Oxoniæ..... A. D. 1699.

[3] Une notice sur ce géomètre, et un extrait du seul ouvrage qu'il ait publié, sont donnés à la IIe Partie des *Pièces justificatives et Documents.* [F. L.]

[4] La fin de ce paragraphe n'a pas été omise sans motif dans la publication du *Commercium Epistolicum.* L'insertion aurait ôté toute valeur aux notes qui accompagnent la lettre précédente, pag. 91, et les deux lettres qui suivent, pag. 95 et 96. Il est bien clair qu'*Oldenbourg* n'aurait pas recommandé la prudence à *Leibnitz* s'il se fût agi d'émettre des séries déjà connues.

Montucla, qui, le premier, a étudié le *Commercium Epistolicum* avec un grand soin et un véri-

Ex Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburg *(absque Data), in scriniis* Hannoveranæ *Regiæ Bibliothecæ reperta*[1]. *Hac respondetur ad supradictas* Oldenburgi *literas, anno* 1674, 8 Dec. *datas, et insertas pag.* 92.

Quod de quadratura circuli Arithmetica, per infinitam seriem numerorum rationalium, valde simplicem, a me inventa mones, cavendum esse à Paralogismo, cum *Jac. Gregorius* vestras minetur demonstrare talium impossibilitatem : id a non satis percepto promisso meo oriri credo. *Gregorius* enim non hujus quidem quadraturæ generis, quod Arithmeticum appellare soleo, per series numerorum rationalium infinitas, sed exacti penitus et Geometrici per unum quendam numerum, aut finitam numerorum seriem, sive illi rationales sive irrationales sint, impossibilitatem à se demonstratam putavit; quod meo invento nihil adversatur; tametsi quod *Hugenio,* id mihi quoque etiam ob rationes *Hugenio* intactas, videatur; in *Gregoriana* demonstratione vitium esse, quanquam alioqui viri ingenium magnifaciam.

Mittam tibi inventum meum, satis certe memorabile, quod magnitudinem circuli per seriem numerorum rationalium infinitam mire simplicem exprimit; si mihi vicissim duo vestratium inventa Geometrica pollicearis, unum *Collinii,* de quo aliquando mentionem fecisti, de summis serierum numericarum finitarum, quarum termini sint primanorum, secundanorum, etc. reciproci; alterum *Gregorii* circa

---

table esprit d'impartialité, s'exprime ainsi dans son *Histoire des Mathématiques*, t. III. Paris, 1802, pag. 106 et 107 :

« Si elles [les apostilles ajoutées au *Commercium Epistolicum*] étoient exactes, on ne pourrait « disculper Leibnitz d'un plagiat évident; mais elles sont toutes ou inexactes ou susceptibles de « répliques qui les anéantissent, comme le vont montrer les observations suivantes :

« 1°. Quelque soin que j'aie mis à lire le *Commercium Epistolicum,* je n'y ai vu nulle part que la « méthode des suites ait été dévoilée à Leibnitz, ni qu'il ait reçu aucune suite pour le cercle avant « qu'il eût annoncé la sienne à Oldenbourg, avec l'analogie particulière qu'elle lui faisoit découvrir « entre les aires du cercle et celles de l'hyperbole. Quelle apparence que Leibnitz se fût vanté « d'une découverte auprès de celui-là même qui la lui avoit communiquée?

« 2°. La suite, dont postérieurement Leibnitz demande la démonstration à Oldenbourg, est « celle-ci $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5$ etc., qui donne l'arc par le sinus; mais cette suite n'est point celle que « donne la méthode de Leibnitz, et qui est celle qui donne l'arc par la tangente; ainsi c'est mal à « propos qu'on observe dans ces apostilles que Leibnitz avoit avancé qu'il pouvoit trouver l'arc « par le sinus, et qu'ensuite il avoit demandé la démonstration de celle de Newton. » [F. L.]

[1] Voyez *Leibnizens mathematische Schriften herausgegeben von* C. I. Gerhardt. *Berlin,* 1849, tome Ier, pages 59 et 60.

Le contenu de la lettre ne permet pas de douter qu'elle ne soit une réponse à la lettre d'*Oldenbourg* du 8 déc. 1674 (*Com. Epist. pag.* 92) : elle devrait donc, d'après le n° XXXV, porter la date du 30 mars 1675. Cependant M. Gerhardt n'a pas trouvé le seul paragraphe qui soit cité dans le *Commercium : « scribis clarissimum Newtonum, etc. ».* [F. L.]

methodum appropinquandi ad veram circuli et Hyperbolæ magnitudinem per series convergentes, cujus in Exercitationibus Geometricis exempla dedit. . . . .

Intelligo autem non inventa tantum, sed et demonstrationes mitti debere. Meum exactissime demonstratum, sed et numeris comprobatum habeo, etc.

Initium Epistolæ D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *anno* 1675, 15 [12] Aprilis *datæ. Fragmenta leguntur superius impressa pag.* 93. *Integra extat in tomo primo D.* Gerhardt, pag. 60-69.

Accepi literas tuas, quæ Machinam tuam novam describunt et Algebraica quædam rariora indigitant [1].

Ex Epistola D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *Anno* 1675, 30 sept. *data. Fragmenta leguntur superius impressa pag.* 98. *Omissa quæ ad rem spectant restituuntur e* Leibnitii *MSS à D.* Gerhardt, *in lucem editis, tom. I, pag.* 81 *et* 82.

Scriptum quoddam lingua Belgica concinnatum Belga quidam *Georgius Moor* vocatus, Algebræ et Mechanices probe peritus, et Parisios nuper profectus apud *Collinium* nostrum reliquit, cujus Apographum hic insertum Tibi communicare libuit; etc. . . . .

Dicis incidisse Te nuper in elegantem methodum, qua superioribus æquationibus omnium graduum (ad certam tamen formam redactis) accommodari radices *cardanicis* similes possint, idque sine sublatione omnium terminorum inter primum et penultimum mediorum, imo nullo termino sublato, modo certa sit inter ter-

---

[1] Oldenbourg avait donc reçu, sinon la série de Leibnitz, au moins l'indication de cette série, avant d'écrire la lettre du 15 avril 1675, où il expose, d'après Collins, les travaux de Gregory. C'est là que Leibnitz en prit connaissance pour la première fois.

Dans la correspondance d'Huyghens avec Leibnitz, publiée par le professeur Uylenbroek, on lit ce qui suit :

Le 7 novembre 1674.

HUYGHENS A LEIBNITZ.

Je vous renvoie, Mr., votre escrit touchant la quadrature arithmétique que je trouve fort belle et fort heureuse, et ce n'est pas peu à mon avis d'avoir découvert, dans un problème qui a exercé tant d'esprits, une voye nouvelle qui semble donner quelque espérance de parvenir à sa véritable solution. Car le cercle, suivant vostre invention, estant à son quarré circonscrit comme la suite infinie de fractions $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. à l'unité, il ne paroistra pas impossible de donner la somme de cette progression, etc.... (*Christiani Hugenii.... Exercitationes Mathematicæ et Philosophicæ*. Hagæ Comitum. 1833. *Fasciculus* 1, *pag.* 6.)

Ainsi Leibnitz avait communiqué à Huyghens la série pour le cercle, plus de cinq mois avant qu'Oldenbourg lui fît parvenir les séries de Gregory. L'accusation de plagiat, portée contre Leibnitz dans le *Commercium Epistolicum* et dans le *Recensio*, n'est donc pas fondée; j'ajoute qu'elle ne paraît pas sincère. [F. L.]

minos intermedios relatio. Hoc quod attinet, putat *Collinius*, affine id quodam modo esse *Gregorii*[1] et *Tschirnhausii*[2] (qui nuper Parisios hinc abiit, et Te sine dubio jam salutavit) methodo generali. Utrumque quippe hunc in eandem circa hoc methodum incidisse existimat speratque *Collinius*[3].

Scire cupis, etc. . . . .

Ex Epistola D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *anno* 1676, 26 Julii *data. Integra legitur in* Leibnitii MSS *à D.* Gerhardt *in lucem editis, vol. I, pag.* 88-99.

Impense lætabar, amice plurimum colende, conspecta de novo docta tua quam diu subduxeras manu, maturiusque responsum parassem, ni id ab amicis, *Newtono* imprimis et *Collinio* (qui nec ipsi semper sui juris sunt) parte longe maxima dependisset. Dum prioris meditationes parantur, en tibi varia et accumulata *Collinii* nostri communicata, menti ad tempus satis forsan distinendæ accommoda, donec scilicet alia à D. *Newtono* succenturientur.

Suit l'abrégé, fait par Oldenbourg, de la Collectio *de Collins. D'abord les séries de Gregory; ensuite:*

Defuncto *Gregorio*, congessit *Collinius* amplum illud commercium literarium, quod ipsi inter se coluerant, in quo habetur argumenti hujus de seriebus historia: cui D. *Newtonus* pollicitus est se adjecturum suam methodum inventionis illius, prima quaque occasione commoda edendam; de qua interea temporis hoc scire præter rem non fuerit, quod scilicet D. *Newtonus* cum in litteris suis Decemb. 10. 1672[4] communicaret nobis methodum ducendi taugentes ad curvas geometricas ex æquatione exprimente relationem ordinatarum ad Basin, subjicit hoc esse unum particulare, vel corollarium potius, methodi generalis, quæ extendit se absque molesto calculo[5], non modo ad ducendas tangentes accommodatas omnibus curvis, sive Geometricas, sive Mechanicas, vel quomodocunque spectantes lineas rectas, aliisve lineis curvis; sic etiam ad resolvenda alia abstrusiora problematum genera de curvarum flexu, areis, longitudinibus, centris gravitatis etc. Neque

---

[1] Jacques Gregory, né en 1636, mort en 1675.

[2] Tschürnhausen, né en 1651, mort en 1708.

[3] En rétablissant encore ici un paragraphe omis ou tronqué, j'ai voulu montrer l'esprit qui a présidé aux extraits du *Commercium Epistolicum*, et réduire à sa juste valeur le certificat d'impartialité délivré par l'abbé Conti aux éditeurs : « In *Transactionibus philosophicis* pro Jan. et Feb. 1718, pag. 925: dicitur quod *Abbas de Comitibus* per HORAS ALIQUOT inspexit Epistolas « antiquas et libros Epistolarum in Archivis R. Societatis asservatos, ut aliquid inveniret quod vel « pro *Leibnitio* vel contra *Newtonum* faceret, et in *Commercio Epistolico* omissum fuisset; sed « ejus generis NIHIL invenire potuit. » *Ad lectorem, pag.* 6. [F. L.]

[4] Voyez ci-dessus, pag. 83.

[5] Sluse a dit exactement la même chose dans sa lettre à Oldenbourg en date du 17 janvier 1673. Voyez ci-dessus, pag. 193.

(sic pergit) ut *Huddenii* methodus de maximis et minimis, proindeque *Slusii* nova Methodus de Tangentibus, (ut arbitror), restricta est ad æquationes, Surdarum quantitatum immunes. Hanc methodum se intertexuisse, ait *Newtonus*, alteri illi, quæ æquationes expedit reducendo eas ad infinitas series; adjicitque, se recordari, aliquando data occasione, se significasse Doctori *Barrovio* lectiones suas jamjam edituro, instructum se esse tali methodo ducendi tangentes, sed avocamentis quibusdam se præpeditum, quominus eam ipsi describeret [1].

. . . .

Ex Epistola D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *anno* 1676, 26 Julii *data. In qua D.* Newtoni *Epistola prior* (*superiùs, pag.* 102) *inclusa fuit. Integra extat in tomo primo D.* Gerhardt, *pag.* 100-113.

Extractiones Radicum [Comm. Epist. pag. 105] æquationum affectarum in speciebus imitantur earum Extractionem in Numeris. Sed Methodus *Vietæ et Oughtredi* nostri huic negotio minus idonea est; quapropter aliam excogitare adactus sum, cujus specimen exhibent sequentia Diagrammata, ubi dextra columna prodit substituendo in media columna valorum ipsorum p, q, r, etc., in sinistra columna expressos. Prius Diagramma exhibet resolutionem hujus numeralis æquationis $y^3 - 2y - 5 = 0$, et hic in supremis pars negativa Radicis subducta de parte affirmativa, relinquit absolutam Radicem 2,09455148, et posterius Diagramma exhibet resolutionem hujus literariæ æquationis $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$.

---

[1] C'est dans ce paragraphe que consiste toute la communication donnée à Leibnitz de la célèbre lettre du 10 décembre 1672, dans laquelle, suivant le Rapport du Comité, la méthode des Fluxions est *suffisamment* décrite pour *toute personne intelligente* « *in which Letter the method of* FLUXIONS « *was sufficiently described to any intelligent person.* » (*Report of the Committee, pag.* 183.)

Il est peu probable que les éditeurs du *Commercium* aient ignoré qu'Oldenbourg s'était borné à adresser à Leibnitz un abrégé de la *Collectio* de Collins. La date de l'envoi, 26 *junii* 1676, mentionnée par interpolation dans la deuxième édition du *Commercium*, n'est justifiée par aucun document, et elle est même infirmée par la lettre de Leibnitz, pag. 112 : « *Literæ tuæ, die* 26 julii *datæ* etc... » : elle semblerait avoir été prise sur la minute de la lettre d'Oldenbourg : seulement on aurait lu *junii* au lieu de *julii*. Dans tous les cas, il y avait alors dans les archives de la Société Royale, et il y a encore aujourd'hui, un abrégé de la *Collectio* de Collins, qui est coté ainsi : « *To Leibnitz, the* 14*th of june* 1676, *About Mr. Gregories remains.* » (MSS. LXXXI.); et cet abrégé, pas plus que la lettre d'Oldenbourg, ne donne l'exemple du procédé pour mener les tangentes, mais fait simplement allusion à la méthode. Ce fait, plus important encore pour la forme que pour le fond de la controverse, a été signalé pour la première fois par M. Edleston †, et a été complétement discuté, avec un sentiment parfait de savante et consciencieuse critique, par M. le professeur Aug. de Morgan, dans une dissertation insérée au *Companion to the almanac for* 1852 ††. [F. L.]

† *Correspondence of sir Isaac Newton and professor Cotes..... published..... by J. Edleston..... London*, 1850, *pag.* XLVII.

†† *A short account of some recent discoveries in England and Germany relative to the controversy on the invention of fluxions, pag.* 7, *and foll.*

Suivent les tableaux imprimés, pages 61 et 64.

In priori Diagrammate primus terminus valoris ipsorum *p*, *q*, *r* in prima columna invenitur dividendo primum terminum summæ proxime superioris per coefficientem secundi termini ejusdem summæ (ut — 1 per 10, ant 0,061 per 11,23) et mutando signum quoti. Et idem terminus eodem fere modo invenitur in secundo Diagrammate. Sed hic præcipua difficultas est in inventione primi termini radicis : id quod methodo generali perficitur; sed hoc, brevitatis gratia, jam prætereo; ut et alia quædam, quæ ad concinnandam operationem spectant : neque enim hic compendia tradere vacat[1]. Sed dicam tantum in genere, etc. . . .

Hactenus D. *Newtonus*, quæ ipsi mihi non vacabat transcribere. Vereor autem, ne Amanuensis[2] meus sæpicule fuerit hallucinatus, cum nonnisi perfunctorie et valde cursim relegere mihi licuerit. Tua ipsius sagacitas errores emendabit. Quando visum tibi fuerit respondere (quod ut ocyus fiat, precor) more solito literas mihi destinatas inscribi velim, nempe, etc. Devincies me, si Nobilissimum D. *Tschirnause* meo et D. *Collinii* nomine officiosissime salutes, ipsique dicas, bas duas[3] epistolas vos ambos spectare, et ab utroque vestrum responsionem expetere. Valete, et rem Mathematicam Philosophicamque augere pergite. Dabam Londini d. 26 Julii 1676.

Epistola D. Newtoni *posterior ad D.* Oldenburgum, *Octob.* 24. 1676 *data, cum D.* Leibnitio *communicanda.*

D'après M. Gerhardt, la copie, qui est conservée à la bibliothèque Royale de Hanovre, porte cette annotation de la main d'Oldenbourg : « *Copied nov.* 4. 1676. » Le texte ne diffère de celui qui est imprimé dans le *Comm. Epist.* que par l'omission du membre de phrase suivant : [Licet non directe, ubi index dignitatis est numerus integer]. *Voyez ci-dessus pag.* 130.

La lettre de Newton est parvenue fort tard à Leibnitz, que l'on ne savait où joindre par suite de ses nombreux voyages. Collins annonce à Newton (pag. 146) qu'elle n'avait pas encore été envoyée à la date du 5 mars 1677. Une lettre d'Oldenbourg, publiée par M. Gerhardt et dont nous donnons plus loin un extrait, prouve que l'envoi a été fait le 2 mai 1677. Enfin Leibnitz en accuse réception dans la mémorable lettre du 21 juin 1677.

---

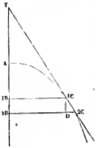
[1] Cette citation établit qu'en juin et juillet 1676, ni Newton, ni Oldenbourg ne pensaient que Leibnitz eût eu connaissance du traité *de Analysi per æquationes numero terminorum infinitas*. Plus tard ce traité a été invoqué à l'appui de l'accusation de plagiat. [F. L.]

[2] L'abrégé de la *Collectio* paraît avoir été transcrit de la main d'Oldenbourg, tandis qu'il chargeait son secrétaire de copier la lettre de Newton. [F. L.]

[3] Les deux lettres, qui comprennent l'abrégé de la *Collectio* de Collins et l'*Epistola prior* de Newton, ont donc été envoyées le 26 juillet 1676. [F. L.]

Excerpta ex Epistola D. Collins *ad D.* Newtonum, Londini 5 Martii 1677 *data* [1]. *In tomo tertio operum D.* Wallisii *pag.* 646 *et seq.*

Fundamentum calculi hic exponam, ejusque simul exemplum dabo.



In figura, sit AB vel A2B $= x$, BC vel 2B2C $= y$. Quæ duæ quantitates indeterminatæ. Sint aliæ determinatæ a, b, c, d, e, f. Et sit æquatio exprimens relationem inter x et y talis

$$ax^2 + by^2 + cyx + dx + ey + f = o.$$

Quæ æquatio in suo gradu (quadratico scilicet) generalissima est; omnibusque exemplis applicari potest pro varia literarum determinatarum explicatione; cùm etiam ipsi o (sive nihilo) vel terminis ipso nihilo minoribus (seu negativis) quoque applicari posset.

Jam $\frac{BC}{TB}$ vocetur z. Posito TC esse Tangentem, erit (per methodum tangentium vel *Huddenii* vel *Slusii*) $-z = \frac{2ax + cy + d}{2by + cx + e}$, ut exponenti statim patebit.

Verùm id nondum est ultimum quod in eo genere fieri potest aut debet. Nam, ex hoc valore ipsius z invento, potest tolli alterutra indeterminatarum x vel y, et inveniri relatio ipsius z ad solam remanentem. Tollamus y et quæramus relationem z ad x .... Prodibit

$$(3bc^2 + 4ab^2)x^2z^2 + (6bce + 4b^2d)xz^2 - (12abc + c^3)x^2z + (4ab^2 + 3ac^2)x^2$$
$$+ (3be^2 + 4b^2f)z^2 - (8abe + 4bcd + 3c^2e)z^2 + (4abd + 2ace + 2c^2d)x$$
$$- (4bde + ce^2 + 4bcf)z + bd^2 + cde + fc^2 = o.$$

Quæ est æquatio quæsita, exprimens relationem z ad solam x. Quæ novissima est; neque ab ulla litera ampliùs purgari potest.

Idem optarim fieri in sequente gradu, assumptà æquatione

$$gx^3 + hy^3 + lx^2y + mxy^2 + ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = o.$$

Eodemque modo quærendo ipsius z ad x relationem.

Quod si in aliquot gradibus, quousque commodum, continuaretur; haberemus Tabulam Tangentium analyticam, usùs maximi, tum ad alia multa, tum ad meam æquationum per Series resolutionem [2].

---

[1] Le passage que je rétablis ici, a été supprimé, sans aucun avertissement, dans la publication du *Commercium Epistolicum* : il est placé, dans la lettre originale, entre les deux paragraphes rapportés, pag. 146, dont le premier se termine ainsi : *sine calculo continuari possit.* La connaissance de ce passage est nécessaire pour l'intelligence de la discussion insérée au *Recensio*, page 24, et permet en outre d'apprécier le nouveau degré d'instruction qu'aurait pu puiser Leibnitz dans la lettre de Newton à Collins, du 10 déc. 1672, s'il en avait reçu entière copie. [F. L.]

[2] On voit qu'il s'agit là d'un problème d'élimination, indépendant de la méthode des tangentes. [F. L.]

Rectiùs initio scripsissem $a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + g = 0$; ut, servato eodem ordine, postea pergi possit in sequente gradu ad hanc formam, $a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + lx^3 + my^3 = 0$, et sic porrò.

Amstelodami cum *Huddenio* etc.

Ex Epistola D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *anno* 1677, 22 Feb. *data. Integra extat in tomo primo D.* Gerhardt, *pag.* 150 *et* 151.

Epistolam tuam utramque, unam Amstelodami, alteram Hanoveræ datam, rite accepi. Procrastinavi hactenus ad Te scribere, quod nollem ea periclitari, quæ ad Te transmittenda mihi suppetunt, quorum e numero litteræ sunt *Newtonianæ*, non minus argumento graves, quam scripto prolixæ.

Ex Epistola D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *anno* 1677, 2 Maii *data. Integra extat in tomo primo D.* Gerhardt, *pag.* 151-153.

Rumpo taudem moram, quam ex eo nexui, quod verebar epistolam *Newtonianam* hic inclusam et mihi inscriptam extra periculi aleam non esse, si per tabellionem ordinarium transmitteretur. Nunc demum occasio se obtulit, eam cum reculis quibusdam *Schroederianis*, quæ navi Anglica Hamburgum, atque inde per ministrum Hanoveranum Hanoveram curandæ sunt, transmittendi. Solenniter promisit *Guilielmus Shroederus* se parem hujus fasciculi cum suismet rebus curam habiturum. Quamprimum ad manus tuas pervenerit, certiorem me fieri de eo velim: responsionem tuam Amstelodamo vel Antverpia Londinum mittendo, eamque, ut soles, ad *Grubendolium*, citra ullum alium titulum, inscribendo. Mitto tibi *apographum* literarum *Newtoni*, *autographum* ad memet directum, mihi reservans. Tanta id ipsum cura relegi, quantam occupationes meæ confertissimæ patiebantur. Ad alia nunc distrahitur *Newtonus*, etc.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad D.* Oldenburgum, 21 Junii 1677 *data, cum D.* Newtono *communicanda. Integra extat in* Commercio Epistolico, *pag.* 146, *et in tomo primo D.* Gerhardt, *pag.* 154-162.

Accepi *Hodie*[1] literas Tuas diu expectatas, cum inclusis *Newtonianis* sane pulcherrimis, etc.

---

[1] La lettre de Leibnitz n'a probablement pas été écrite en un seul jour, et on ne peut raisonnablement conclure du mot *Hodiè* autre chose, sinon que la lettre de Newton, du 24 octobre 1676, est parvenue vers le milieu du mois de juin 1677, et que Leibnitz y a immédiatement répondu par

Ex Epistola D. Oldenburg *ad D.* Leibnitium, *anno* 1677, 9 Augusti *data. Integra extat in tomo primo D.* Gerhardt, *pag.* 166-168.

Ex quo tempore ad Te scripsi per D. *Sambinum Heidelbergensem*, quem etiam D. *van der Heck* commendavi, ut scilicet fasciculum meum ipsi pro Te traditurum *Hanoveram* summa cura expediret, binas a Te literas accepi, quæ utræque de prolixa illa D. *Newtoni* epistola, antehac ad Te missa, cogitationes tuas aperiunt. Non est quod dicti *Newtoni* vel etiam *Collinii* nostri responsum tam cito ad eas expectes, cum et urbe absint, et variis aliis negotiis distineantur.....

Dans les *Acta Eruditorum* pour le mois d'octobre 1684, Leibnitz publie les principes du calcul différentiel sous le titre : *Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.*

Excerpta ex Actis Lipsiensibus, *anno* 1686, M Junii, *autore* Leibnitio.

DE GEOMETRIA RECONDITA ET ANALYSI INDIVISIBILIUM ATQUE INFINITORUM [1].

Quod superest, ne nimium mihi ascribere aut detrahere aliis videar, paucis dicam quid potissimum insignibus nostri sæculi mathematicis in hoc geometriæ genere mea

---

un exposé des principes du calcul différentiel, tel qu'il l'a toujours pratiqué depuis, et tel qu'on le pratique encore aujourd'hui.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer l'identité des figures et de certaines expressions algébriques dans les lettres des 5 mars et 21 juin 1677. [F. L.]

[1] Dans cet article, écrit à l'occasion d'un ouvrage de *John Craig*, qui a pour titre : *Methodus figurarum curvilinearum quadraturas determinandi*, *London*, 1685, Leibnitz établit les bases du calcul intégral, fait l'histoire sommaire des travaux qui ont préparé l'invention de son calcul différentiel, et rend au génie de Newton un hommage bien senti.

Craig se sert, dans son ouvrage, de la méthode différentielle qu'il avait étudiée dans les *Actes de Leipsick*, mais qu'il n'avait pas bien comprise : il emploie encore la même méthode et la rapporte toujours à Leibnitz, dans un second traité qui a paru à Londres en 1693 : *Tractatus Mathematicus de Figurarum curvilinearum quadraturis et locis geometricis*. Enfin, dans une troisième publication faite à Londres en 1718, sous le titre : *De calculo fluentium libri duo. Quibus subjunguntur libri duo de Optica analytica*, Craig ne dit plus un mot du calcul différentiel. Dès 1685, ce géomètre écossais avait été mis en rapport avec Newton, qui résidait alors à Cambridge. Newton lui communiqua le *théorème du binôme*, mais ne lui fit rien connaître de la méthode des fluxions. Voyez à ce sujet l'*Histoire des Mathématiques* par Montucla, tome III, page 127, et deux articles de M. A. de Morgan dans le *Philosophical Magazine*, novembre 1852, et dans le *North British Review*, août 1855. [F. L.]

sententia debeatur. Primi *Galilæus* et *Cavallerius* involutissimas *Cononis* et *Archimedis* artes detegere cœperunt. Sed Geometria indivisibilium Cavalleriana, Scientiæ renascentis nonnisi infantia fuit. Majora subsidia attulerunt triumviri celebres, *Fermatius* inventa methodo de maximis et minimis, *Cartesius* ostensa ratione lineas Geometriæ communis (transcendentes enim exclusit) exprimendi per æquationes, et *P. Gregorius a S. Vincentio* multis præclaris inventis. Quibus egregiam *Guldini* regulam de motu centri gravitatis addo. Sed et hi intra certos limites constitere, quos transgressi sunt novo aditu aperto, *Hugenius* et *Wallisius*, Geometræ inclyti. Satis enim probabile est, Hugeniana *Heuratio*, Wallisiana *Neilio* et *Wrennio*, qui primi curvis æquales rectas demonstravere, pulcherrimorum inventorum occasionem dedisse. Quod tamen meritissimæ laudi inventionum nil detrahit. Secuti hos sunt *Jacobus Gregorius* Scotus, et *Isaacus Barrovius* Anglus, qui præclaris in hoc genere theorematibus scientiam mire locupletarunt. Interea *Nicolaus Mercator*, Holsatus, mathematicus et ipse præstantissimus, primus, quod sciam, quadraturam aliquam dedit per seriem infinitam. At idem inventum non suo tantum Marte assecutus est, sed et universali quadam ratione absolvit profundissimi ingenii Geometra, *Isaacus Newtonus*, qui si sua cogitata ederet, quæ illum adhuc premere intelligo, haud dubie nobis novos aditus ad magna scientiæ incrementa compendiaque aperiret.

Mihi contigit adhuc tironi in his studiis, ut ex uno aspectu cujusdam demonstrationis de magnitudine superficiei sphæricæ subito magna lux oboriretur. Videbam enim generaliter figuram factam ex perpendicularibus ad curvam, axi ordinatim applicatis (in circulo radiis), esse proportionalem superficiei ipsius solidi, rotatione figuræ circa axem geniti. Quo primo theoremate (cum aliis tale quid innotuisse ignorarem) mirifice delectatus, statim comminiscebar triangulum, quod in omni curva vocabam characteristicum, cujus latera essent indivisibilia (vel accuratius loquendo infinite parva) seu quantitates differentiales; unde statim innumera theoremata nullo negotio condebam, quorum partem postea apud *Gregorios* et *Barrovium* deprehendi. Nec dum vero Algebraico calculo utebar; quem cum adjecissem, mox Quadraturam meam Arithmeticam aliaque multa inveni. Sed nescio quomodo non satisfaciebat mihi calculus Algebraicus in hoc negotio, multaque quæ analysi voluissem, præstare adhuc cogebar figurarum ambagibus, donec tandem verum Algebræ supplementum pro transcendentibus inveni, scilicet meum calculum indefinite parvorum, quem et differentialem aut summatorium aut tetragonisticum, et ni fallor, satis apte *analysin indivisibilium et infinitorum* voco, quo semel detecto, jam ludus jocusque visum est, quicquid in hoc genere ipse antea fueram admiratus.

Excerpta e Philosophiæ naturalis Principiis Mathematicis, *anno* 1687 *in lucem editis*[1]. Pag. 250-254.

Lemma II.

Momentum Genitæ æquatur momentis terminorum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum et coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem quæ ex terminis quibuscunque in Arithmetica per multiplicationem, divisionem et extractionem radicum; in Geometria per inventionem vel contentorum et laterum, vel extremarum et mediarum proportionalium absque additione et subductione generatur. Ejusmodi quantitates sunt Facti, Quoti, Radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica et similes. Has quantitates, ut indeterminatas et instabiles, et quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes hic considero, et eorum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo : ita ut incrementa pro momentis addititiis seu affirmativis, et decrementa pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Momenta, quam primum finitæ sunt magnitudinis, desinunt esse momenta[2]. Finiri enim repugnat aliquatenus perpetuo eorum incremento vel decremento. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes et fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates ve-

---

[1] *Philosophiæ naturalis Principia Mathematica. Auctore* Is. Newton, Trin. Coll. Cantab. Soc. *Matheseos Professore* Lucasiano, *et Societatis Regalis Sodali. Londini*, ... *Typis* Josephi Streater.... *Anno* 1687.

Les *Principes* ont été publiés vers le milieu de l'été de 1687. C'est dans le deuxième livre de cet ouvrage que Newton a parlé ouvertement, pour la première fois, des *moments* et des *fluxions*.

Newton ne se décida à livrer le manuscrit des *Principes* que sur les instances réitérées de Halley, qui voulut prendre à sa charge les frais d'impression et les soins de la révision des épreuves. Le premier livre a été présenté à la Société Royale le 28 Avril 1686, et le troisième, le 6 Avril 1687. Il résulte, d'ailleurs, de la correspondance de Newton et de Halley que le second livre était prêt pour l'impression dans l'automne de 1686. La préface de la première édition ne porte aucune date. La date « *Dabam* Cantabrigiæ, *e collegio* S. Trinitatis, *Maii* 8, 1686 » se lit pour la première fois dans la seconde édition en 1713. Voyez *Birch the history of the Royal Society*, Tom. IV, pag. 347, 479, 486 et 529. — *Uylenbroek. Hugenii... exercitationes*... fasc. 2, pag. 99. — *Rigaud. Historical essay on the first publication of the Principia*, pag. 14 and foll. *Appendix*, pag. 29. [F. L.]

[2] Le texte cité est celui de la premiere édition. Quelques changements ont été faits à la rédaction dans les éditions suivantes. M. le professeur A. de Morgan en a discuté le sens et l'importance dans un article inséré au *Philosophical Magazine*, pour le mois de novembre 1852. [F. L.]

locitatibus hisce proportionales. Termini autem cujusque generantis coefficiens est quantitas, quæ oritur applicando Genitam ad hunc terminum.

Igitur sensus Lemmatis est, ut si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrescentium A, B, C, etc. Momenta, vel mutationum velocitates, dicantur a, b, c, etc. Momentum vel mutatio rectanguli AB fuerit $Ab + aB$, et contenti ABC momentum fuerit $ABc + AbC + aBC$: et dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A^2}$ et $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$ Momenta $2Aa$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-1}$, $-2aA^{-2}$, et $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ respective. Et generaliter ut dignitatis cujuscunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut Genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB + A^2b$; et Genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4A^3bB^3C^2 + 2A^3B^4Cc$; et Genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ sive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2} - 2A^3bB^{-3}$: et sic in cæteris.

Nous omettons la démonstration et les corollaires.

Scholium.

In literis quæ mihi cum Geometra peritissimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas et Minimas, ducendi Tangentes et similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, et literis transpositis hanc sententiam involventibus [Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, et vice versa] eandem celarem : rescripsit Vir Clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, et methodum suam communicavit à mea vix abludentem præterquam in verborum et notarum formulis [1]. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

[1] Dans la deuxième édition publiée en 1713 par les soins de R. Cotes, Newton, soit de lui-même, soit sous l'inspiration de son savant auxiliaire, a ajouté : « *et idea generationis quantitatum.* » Il signalait ainsi, avec une parfaite sincérité, une nouvelle différence caractéristique des méthodes.

Dans la troisième édition, publiée en 1726 par les soins de H. Pemberton, et comme les deux autres sous la direction vigilante de Newton, la rédaction du scholie a été entièrement changée. Voici le nouveau texte :

« In epistola quadam ad D. *J. Collinium* nostratem, 10 Decemb. 1672 data, cum descripsissem « methodum tangentium quam suspicabar eandem esse cum methodo *Slusii* tum nondum com- « municata; subjunxi : *Hoc est unum particulare vel....* (voyez pag. 84). *Hanc methodum inter-* « *texui alteri isti qua æquationum exegesin instituo reducendo eas ad series infinitas.* Hactenus « epistola. Et hæc ultima verba spectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus scripseram. « Methodi vero hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente. »

Newton supprime ici Leibnitz, comme il supprimera plus loin Flamsteed, dont il croyait avoir aussi à se plaindre.

L'ouvrage déjà cité de sir D. Brewster contient des détails curieux et instructifs sur plusieurs projets de la dernière rédaction du scholie, *tome II*, *pages* 31, 32, 425 *et* 426. [F. L.]

Epitome [1] Philosophiæ Naturalis Principiorum Mathematicorum. *Excerpta ex* Actis Lipsiensibus, *Men.* Junii 1688. *Pag.* 308 *et* 309.

Inspersa sunt propositionibus hinc inde Lemmata, Geometriam, conicorum præcipue, non parum perficientia; adjectaque passim corollaria amplitudinem demonstratorum ostendentia; et ne sterilis doctrina videri possit, scholia philosophiam illustrantia.

Ad hæc illave pertinent, a nobis merito commemoranda : .... de momentis (principiis jamjam nascentibus finitarum magnitudinum) genitarum quantitatum, æqualibus ipsis momentis terminorum singulorum generantium, in eorundem laterum indices dignitatum et coefficientia continue ductis; ubi et de sua (cui geminam Cl. *Leibnitio* esse affirmat) methodo determinandi maximas et minimas, ducendi tangentes, etc., in terminis surdis æque ac in rationalibus procedente, cujus utriusque fundamentum peculiari propositione exponit: etc.....

G. G. L. *De lineis opticis, et alia. Excerpta ex* Actis Lipsiensibus, *Men.* Jan. 1689. *Pag.* 36 *et* 37.

Versanti mihi dudum in longinquo satis itinere, quod Serenissimi Principis mei jussu suscepi, et passim monumenta in Archivis et Bibliothecis excutienti, oblati sunt ab amico quodam *Actorum Lipsiensium* menses, unde jam diu novorum librorum expers discerem, quid in Republica literaria ageretur. Inspicienti igitur *Junium* anni 1688 occurrit relatio de *Principiis Naturæ Mathematicis* Viri clarissimi *Isaaci Newtoni*, quam licet à præsentibus meis cogitationibus longe semotam, avide et magna cum delectatione legi. Est enim vir ille ex paucorum illorum numero, qui scientiarum pomæria protulere. etc.

G. G. L. *Schediasma de resistentia medii, et motu projectorum gravium in medio resistente. Excerpta ex* Actis Lipsiensibus, *Men.* Jan. 1689. *Pag.* 46.

Multa ex his deduci possent praxi accommodata, sed nobis nunc fundamenta Geometrica jecisse sufficit, in quibus maxima consistebat difficultas. Et fortassis attente consideranti vias quasdam novas vel certe satis antea impeditas aperuisse videbimus. Omnia autem respondent *nostræ Analysi infinitorum*, hoc est, *calculo summarum et differentiarum* (cujus elementa quædam in his Actis dedimus) communibus quoad licuit verbis hic expresso. etc.

---

[1] Dans le *Journal des Savants* (cahier d'avril 1852), M. Biot a exprimé l'opinion que ce sommaire fidèle des *Principes* a été écrit par Newton lui-même. [F. L.]

Tentamen de motuum cœlestium causis, auctore G.-G. L. *Excerpta ex* Actis Lipsiensibus, *Mens.* Feb. 1689. *Pag.* 92.

(20) *Planeta idem attrahitur a Sole diversimode; et quidem in duplicata ratione viciniorum:* ita ut idem duplo vicinior, etc... Video hanc propositionem jam tum innotuisse etiam viro celeberrimo *Isaaco Newtono*, ut ex relatione Actorum apparet, licet inde non possim judicare, quomodo ad eam pervenerit [1].

Excerpta ex Epistola cujusdam ad Amicum [2]. *Impressa est à D.* Edleston « *Correspondence of sir* Isaac Newton *and Professor* Cotes... London, 1850 », *pag.* 308 *et seq.*

Anno 1683 [3] ad finem vergente *Newtonus* Propositiones principales earum quæ in Philosophiæ Principiis Mathematicis habentur *Londinum* misit, eædemque cum

---

[1] « Ainsi l'immortel ouvrage des *Principes* avait paru depuis deux ans et Leibnitz ne l'avait « pas regardé : il ne l'avait pas regardé même après que les découvertes inouïes qu'il offrait pour « la première fois au monde, avaient été annoncées dans les *Actes* auxquels Leibnitz renvoie; et « il assure n'en avoir jamais eu connaissance que par cet extrait. Sans doute il faut le croire, car « il serait trop désespérant pour l'honneur de l'esprit humain de supposer un si grand génie « capable de la plus vile imposture : mais alors il faut blâmer un dédain si aveugle ou une si con- « damnable insouciance; et ce qui rend le tort de Leibnitz encore plus inconcevable, c'est qu'outre « le fondement tout à fait hypothétique de sa nouvelle théorie, elle n'est pas même exempte d'er- « reurs de détail dans le calcul de la mesure des forces..... » [J.-B. Biot, *Article* Leibnitz *de la Biographie universelle, tome* XXIII, *page* 635.]

La publication du *Tentamen* est à mes yeux le seul tort que Leibnitz ait eu envers Newton jusqu'au moment de la déplorable controverse qui a empoisonné leurs derniers jours. Ce fut peut-être pour reconnaître ce tort et l'atténuer, que Leibnitz a adressé directement à Newton la lettre du 17 mars 1692, que je reproduis ci-après. [F. L.]

[2] Cette lettre a été publiée par M. Edleston d'après le texte original, écrit de la main même de Newton, et qui est conservé à Cambridge dans la collection de manuscrits appelée *Lucasian papers*. Ce curieux document ne porte point de date; mais d'après diverses indications critiques, habilement rapprochées par l'éditeur, il paraît que ce fut une sorte d'instruction que Newton rédigea, au commencement de 1712, pour être mise sous les yeux des commissaires chargés par la Société Royale de porter un jugement sur les droits respectifs de lui et de Leibnitz, à la priorité d'invention du calcul infinitésimal.

En conférant le texte ci-dessus avec celui de la page 157 du *Com. Epist.*, on reconnaît que la rédaction du n° LXXI, et de la note qui y est jointe, appartient presque entièrement à Newton. [F. L.]

[3] Cette date est inexacte : il faut lire 1684 au lieu de 1683. Les principales propositions *de Motu*, sous la forme de quatre théorèmes et de sept problèmes, ont été envoyées de Cambridge à Halley au mois de novembre 1684. Voyez *Rigaud, Historical essay on the Principia, pag.* 16-20. *Appendix*, N° I. — *Birch. History of the Royal Society, tom. IV, pag.* 347.

La note 1 de la page 206 rectifie les autres erreurs du sommaire historique rédigé par Newton. [F. L.]

Societate Regiâ mox communicatæ sunt; annoquo 1686 Liber ille ad Societatem missus est ut imprimeretur, et proximo anno lucem vidit. Deinde anno 1688 epitome ejus in *Actis Lipsicis* impressa est; qua lecta D. *Leibnitius* Epistolam de lineis opticis, Schediasma de resistentia Medii et motu projectilium gravium in Medio resistente, et Tentamen de motuum cœlestium causis composuit et in *Actis Lipsicis* ineunte anno 1689 imprimi curavit, quasi ipse quoque præcipuas *Newtoni* de his rebus Propositiones invenisset, idque methodo diversa et Librum *Newtoni* nondum vidisset. Qua licentia concessa Authores quilibet inventis suis facile privari possunt. Quamprimum Liber *Newtoni* lucem vidit, exemplar ejus D. *Nicolao Fatio* datum est ut ad *Leibnitium* mitteretur. Viderat *Leibnitius* Epitomen ejus in *Actis Lipsicis*. Per commercium epistolicum quod cum viris doctis passim habebat, cognoscere potuit Propositiones principales in libro illo contentas, imo et librum ipsum procurare. Sin Librum ipsum non vidisset, videre tamen debuisset antequam sua de iisdem rebus cogitata publicaret, etc.

Analysim hanc [*summarum et differentiarum*] per annos undecim vel duodecim *Leibnitius* in differentiis primis jam exercuerat et notaverat differentias differentiarum per *dd*, easque ad inventionem puncti flexus contrarii applicuerat, sed problemata difficiliora per differentias differentiarum soluta nondum dederat. Jam vero per opus *Newtonianum* excitatus hæc aggreditur ac gloriatur se nunc fundamenta Geometrica jecisse in quibus maxima consistebat difficultas et vias quasdam novas vel certe satis antea impeditas aperuisse, et hæc fecisse per Analysin suam infinitorum quam *differentialem* vocat. Sed primo tamen conatu multipliciter erravit, et per errores suos prodidit se methodum illam in difficilioribus hisce nondum probe intellexisse, prodidit se Propositiones *Newtoni* minime invenisse, sed calculum tantum ad conclusiones aptasse. Etc.

Epistola D. Leibnitii *ad D.* Newtonum, *anno* 1693, $\frac{7}{17}$ Martii *data. In tomo primo D.* Gerhardt, *pag.* 168 *et* 169.

Quantum tibi scientia rerum mathematicarum totiusque naturæ debere arbitrer, occasione data etiam publice sum professus. Mirifice ampliaveras Geometriam tuis seriebus, sed edito Principiorum opere ostendisti, patere tibi etiam quæ analysi receptæ non subsunt. Conatus sum ego quoque notis commodis adhibitis, quæ differentias et summas exhibent, Geometriam illam quam Transcendentem appello analysi quodammodo subjicere, nec res male processit. Sed a Te magni aliquid expecto ad summam manum imponendam, tum ut problemata, quæ ex data tangentium proprietate quærunt lineas, reducantur optime ad quadraturas; tum ut quadraturæ ipsæ (quod valde vellem) reducantur ad curvarum rectificationes, utique superficierum aut corporum dimensionibus simpliciores.

Sed super omnia optem, ut Geometricis absolutus naturam, uti cœpisti, mathematice tractare pergas, in quo genere certe tu unus cum paucissimis ingens operæ

pretium fecisti. Mirificum est, quod invenisti ellipses *Kleperianas* prodire, si tantummodo attractio sive gravitatio et trajectio in planeta concipiantur, tametsi enim eo inclinem, ut credam hæc omnia fluidi ambientis motu sive effici sive regi, analogia gravitatis et magnetismi apud nos; nihil tamen ea res dignitati et veritati inventi tui detraxerit. Quæ summus et ipse mathematicus, *Christianus Hugenius* in tua notavit appendice libelli de causa luminis et gravitatis expensa Tibi non dubito; et sententiam vicissim tuam velim, vestra enim amica collatione potissimum, qui in hoc genere eminetis, erui veritas potest.

Cum vero maximum tu quoque lumen ipsi Dioptricæ intuleris, explicatis colorum phænomenis inexpectatis, velim quid sentias de *Hugeniana* explicatione radiationis utique ingeniosissima, cum feliciter adeo prodeat lex sinuum. Significavit mihi *Hugenius*, nescio quæ nova phænomena colorum sibi a Te communicata. Ego valde optem ut ratio colorum quos fixos vocant, ex apparentibus deduci possit, seu ut ostendatur ratio efficiendi per refractiones, ut tota aliqua superficies certum colorem ostendat.

In librorum apud Anglos editorum Indicibus occurrere mihi aliquoties libri mathematici auctore *Newtono*, sed dubitavi a Te essent, quod vellem, an ab alio homonymo.

Heinsonius noster redux testis fuit benevolentiæ erga me tuæ. De cultu vero meo erga Te non ille tantum testari potest, sed et *Stepneius*, tecum ejusdem olim collegii habitator, nunc Magnæ Britannicæ Regis negotia apud Cæsarem, nuper apud Serenissimum Electorem Brandenburgicum curans.

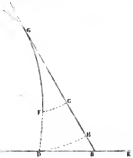
Hæc scribo magis ut studia erga Te mea intelligas, quæ nihil tot annorum silentio amisere, quam ut studia Tua ego, quibus auges humani generis opes, interrumpere velim vacuis litteris, et supervacuis. Vale. Dabam Hannoveræ $\frac{7}{17}$ Martii 1693.

Epistola D. Newtoni *ad D.* Leibnitium, *anno* 1693, $\frac{14}{16}$ Octob. *data. In tomo primo D.* Gerhardt, *pag.* 170 *et* 171.

Literæ tuæ, cum non statim acceptis responderem, e manibus elapsæ inter schedas meas diu latuere, nec in eas ante hesternum diem incidere potui. In quod me moleste habuit, cum amicitiam tuam maximi faciam, teque inter summos hujus sæculi Geometras a multis retro annis habuerim, quemadmodum etiam data omni occasione testatus sim. Nam quamvis commercia philosophica et mathematica quam maxime fugiam, tamen metuebam ne amicitia nostra ex silentio decrementum acciperet; idque maxime cum *Wallisius* noster Historiam Algebræ in lucem denuo missurus nova aliqua e literis inseruit, quas olim per manus D. *Oldenburgi* ad te conscripsi, et sic ansam mihi dedit ea etiam de re ad te scribendi. Postulavit enim ut methodum quandam duplicem aperirem quam literis transpositis ibi celaveram. Quocirca coactus sum qua potui brevitate exponere methodum meam fluxionum quam hac celaveram sententia: *Data æquatione quantitates quotcunque fluentes invol-*

rente invenire fluxiones, et vice versa. Spero autem me nihil scripsisse quod tibi non placeat, et si quid sit quod reprehensione dignum censeas ut literis id mihi significes, quoniam amicos pluris facio quam inventa mathematica.

Reductionem quadraturarum ad curvarum rectificationes quam desiderare videris, inveni talem. Sit curvæ cujusvis abcissa x, ordinata y et area az, posito quod a sit data quantitas. Fluat x uniformiter sitque ejus fluxio $\dot{x} = a$, et ipsius y sit fluxio $\dot{y}$. A dato puncto D in recta positione data DE sumatur $BD = x$, et agatur indefinita BCG ea lege ut cosinus anguli DBG sit ad radium ut fluxio $\dot{y}$ ad fluxionem $\dot{x} = a$: et inveniatur curva FG quam recta BG perpetuo tangit. Id enim semper fieri potest geometrice ubi fluxionum $\dot{x}$ et $\dot{y}$ relatio geometrica est. Sit G punctum contactus et ubi punctum B incidit in punctum D incidat punctum G in punctum F. In Tangente BG sumatur GC æqualis curvæ GF et CH æqualis rectæ FD et erit $BH = z$. Qua inventa habetur area quæsita az.



Quæ vir summus *Hugenius* in mea notavit, ingeniosa sunt. Parallaxis solis minor videtur quam ipse statueram, et motus sonorum forte magis rectilineus est. At cælos materia aliqua subtili nimis implere videtur. Nam cum motus cælestes sint magis regulares quam si a vorticibus orirentur, et leges alias observent, adeo ut vortices non ad regendos, sed ad perturbandos planetarum et cometarum motus conducant; cumque omnia cælorum et maris phænomena ex gravitate sola secundum leges a me descriptas agente accurate quantum sentio sequantur, et natura simplicissima sit; ipse causas alias omnes abdicandas judicavi et cælos materia omni quantum fieri licet privandos, ne motus planetarum et cometarum impediantur aut reddantur irregulares. At interea siquis gravitatem una cum omnibus ejus legibus per actionem materiæ alicujus subtilis explicuerit et motus planetarum et cometarum ab hac materia non perturbatos iri ostenderit, ego minime adversabor. Colorum phænomena tam apparentium ut loquuntur quam fixorum rationes certissimas me invenisse puto, sed a libris edendis manum abstineo, ne mihi lites ab imperitis intententur et controversiæ. Alius est *Newtonus*, cujus opera in librorum editorum indicibus tibi occurrunt. His contestari volui me tibi amicum integerrimum esse et amicitiam tuam maximi facere. Vale. Dabam Cantabrigiæ, October $\frac{16}{26}$ 1693.

* Utinam rectificationem hyperbolæ, quam te invenisse dudum significasti, in lucem emitteres.

Excerpta e Tomo secundo[1] *operum Mathematicorum* J. Wallisii, *anno* 1693 *in lucem edito. Pag.* 391 *et seq.*

Quamvis *Fluentes Quantitates* et earum *Fluxiones* primâ fronte conceptu difficiles videantur, (solent enim nova difficiliùs concipi), earundem tamen notionem citò faciliorem evasuram putat [*Newtonus*], quàm sit notio *Momentorum* aut *partium minimarum* vel *differentiarum infinitè parcarum;* propterea quod Figurarum et Quantitatum generatio per Motum continuum magis naturalis est, et faciliùs concipitur, et Schemata in hac Methodo solent esse simpliciora, quam in illâ partium. Attamen, non negligit Theoriam talium partium, sed eâ etiam utitur, quoties ipsa, vel opus brevius reddit, et magis perspicuum, vel ad rimandas Fluxionum proportiones conducit. Abscissam Curvæ, aliamve Quantitatem Fluentem, uniformiter augeri supponit, et pro ejus Fluxione unitatem ponit; pro reliquis autem Quantitatibus Fluentibus ipsas ponit Quantitates Punctis notatas in hunc modum. Sint v, x, y, z Fluentes Quantitates, et earum Fluxiones his Notis $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, designabuntur respective. Et, quoniam hæ Fluxiones sunt etiam indeterminatæ Quantitates, et perpetua mutatione redduntur majores, vel minores, considerat velocitates, quibus augentur, vel diminuuntur, tanquam earum Fluxiones, et Punctis binis notat in hunc modum $\ddot{v}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, etc.... Et, si Quantitates Fluentes, vel fractæ sunt vel surdæ, Fluxiones earum sic notat : Quantitatum $\frac{yy}{b-x}$, et $\sqrt{aa-xx}$, Fluxiones sunt $\dot{\frac{yy}{b-x}}$ et $\sqrt{\dot{\overline{aa-xx}}}$, et harum fluxiones sunt $\ddot{\frac{yy}{b-x}}$ et $\sqrt{\ddot{\overline{aa-xx}}}$, et sic porrò. Etc....

PROB. I.

Datâ æquatione Fluentes quotcunque Quantitates involvente, invenire Fluxiones.

Solutio.

Multiplicetur quilibet æquationis Terminus separatim per indices singulos Dignitatum Quantitatum omnium Fluentium, quæ in Termino illo continentur; se in

[1] Le tome second des Œuvres mathématiques de Wallis a paru en 1693, deux ans avant la publication du tome premier. C'est là que Newton a exposé pour la première fois la notation des fluxions, et développé les règles principales du calcul, qu'il avait très sommairement indiquées dans le deuxième livre des *Principes*. Le *Tractatus de quadratura curvarum* a été publié en 1704, et la *Methodus Fluxionum* n'a vu le jour qu'en 1736, neuf ans après la mort de l'auteur.

Dans l'extrait que je donne ci-dessus, c'est Wallis qui parle, mais *plerumque suis* [*Newtoni*] *verbis*, comme il a soin d'en prévenir le lecteur. Vide *Elenchum Contentorum*, pag. 3, N° XCV.

[F. L.]

singulis Multiplicationibus mutetur Latus unum Dignitatis in ejus Fluxionem; et aggregatum Productorum omnium sub propriis signis componet æquationem novam, quæ rationem Fluxionum involvet.

Suivent l'explication et la démonstration.

PROB. II.

Ex æquatione, Fluxionem Radicis involvente, Radicem extrahere[1].

RESOLUTIO.

Operatio Prima.

Termini omnes, ex eodem æquationis latere consistentes, æquentur nihilo, et ipsarum y et $\dot{y}$ Dignitates (si opus sit) exaltentur vel deprimantur, sic ut earum indices nec alicubi negativi sint, nec tamen altiores quam ad hunc effectum requiritur, et sit kz^{λ} Terminus infimæ Dignitatis eorum, qui neque per y, neque per ejus Fluxionem $\dot{y}$, neque per earum Dignitatem quamvis, multiplicantur. Sit $lz^{\mu} y^{\alpha} \dot{y}^{6}$ Terminus alius quilibet, et, omnes ordine Terminos percurrendo, collige ex singulis seorsim numerum $\frac{\lambda - \mu + 6}{\alpha + 6}$ sic, ut tot habeas ejusmodi numeros, quot sunt termini. Horum numerorum maximus vocetur ν, et z^{ν} erit Dignitas primi termini Serici. Pro ejus coefficiente ponatur a, et in æquatione, quæ *resolvenda* dicitur, scribe az^{ν} pro y, et $\nu az^{\nu-1}$ pro $\dot{y}$; ac Termini omnes resultantes, in quibus z ejusdem est Dignitatis ac in termino kz^{λ}, sub propriis signis collecti, ponantur æquales nihilo. Nam hæc æquatio, debite reducta, dabit coefficientem a. Sic habes az^{ν}, Terminum primum Serici.

Operatio secunda.

Pro reliquis omnibus hujus seriei terminis nondum inventis pone p, et habebis æquationem $y = az^{\nu} + p$, et inde etiam (per prob. I.) æquationem $\dot{y} = \nu az^{\nu-1} + \dot{p}$. In resolvenda pro y et $\dot{y}$ scribe hos eorum valores: et habebis resolvendam novam, ubi p officium præstat ipsius y: et ex hac resolvenda primum extrahes terminum

---

[1] Hæc Methodus ejusdem est generis cum ea pro extrahendo Radices ex æquationibus affectis superius descripta: Pone, quod problema resolvendum reducatur ad æquationem fluentes Quantitates y et z, una cùm earum Fluxionibus $\dot{y}$ et $\dot{z}$ involventem, et quod Fluxio ipsius z uniformis sit. Ut hæc Fluxio ex æquatione evanescat, pro ea ponatur unitas, et manebit æquatio solas y, z et $\dot{y}$ involvens, *quam resolvendam* vocat. Proponitur inventio ipsius y in serie infinita convergente, quæ solam z involvet. Hoc in aliquibus æquationibus impossibile est, in aliis præparationem æquationum requirit, etc.....

seriei p eodem modo atque terminum primum seriei totius $y = az^{2} + p$ ex resolvenda prima extraxisti.

Operatio tertia, et sequentes.

Dein, tertiam resolvendam eâdem ratione invenies atque secundam invenisti, et ex ea terminum tertium seriei totius extrahes. Et similiter resolvendam quartam invenies, et ex ea quartum seriei Terminum, et sic in infinitum. Series autem sic inventa erit Radix æquationis, quam extrahere oportuit.

Suit un exemple.

Tota Fluxionum Methodus in hujus directa et inversa solutione consistit.

Wallis ajoute en son propre et privé nom :

Huic Methodo affinis est tum methodus differentialis *Leibnitii*, tum utraque antiquior illa quam D. *Is. Barrow* in Lectionibus geometricis exposuit, etc. . . . Quodque ab his duobus est superadditum, est formularum Analyseos brevium et commodarum adaptatio illius Theoriis. Et quidem superstruuntur omnes *Arithmeticæ infinitorum* [1].

Extrait d'une lettre de Huyghens [2] *à* Leibnitz, *en date du* 20 *mai* 1694. *Elle est imprimée tout entière dans la correspondance publiée par M.* Uylenbroek, *tome Ier, pag.* 176 *et suiv.*

Lorsque je reçus votre lettre où est la solution de ce que je vous avois proposé, de trouver la courbe pour la sous-tangente $\frac{2ay^{2}}{a^{2}-y^{2}-x^{2}}$, je l'examinay et construisis la courbe, et vis que vous aviez résolu fort élégamment ce problème par une voie peu commune et que je serois bien aise d'apprendre. Je jugeay que ce que vous dites à l'égard de l'usage qu'on fait de votre nouveau calcul, *voti damnatus sum*, n'estoit que par modestie, car je vois en effet, par des solutions comme celle-cy et d'autres, que vous en sçavez des secrets que les autres ignorent. Vous pourriez faire un excellent traité des usages divers de ce calcul, et je vous y exhorte comme à un ouvrage très-beau et très-utile et qui doit plustost venir de vous que de tout autre. M. Wallis m'a envoyé sa nouvelle édition latine de son grand ouvrage *de Algebra*, augmenté de quelque chose de nouveau des séries de M. Newton [3], où il y a des équations différentielles qui ressemblent tout à fait aux vostres, hormis les charactères. Au reste ce calcul des séries me paroît bien fatiguant, et j'ay été bien aise de ce que M. le M. de l'Hospital m'a mandé, qu'il sçait faire sans les séries tout ce qu'on fait avec elles.

---

[1] Huyghens en citant textuellement ces deux dernières phrases, dans une lettre adressée au M. de l'Hospital sous la date du 16 juin 1694, ajoute : « En quoy pourtant il [Wallis] fait tort à « ces Messieurs. » [F. L.]

[2] Huyghens, né en 1625, mort en 1695.

[3] Newton, né le 25 décembre 1642, mort le 20 mars 1727.

Extrait d'une lettre de Leibnitz [1] *à* Huyghens *en date du* $\frac{12}{22}$ *juin* 1694. *Correspondance citée ci-dessus, pag.* 182 *et suiv.*

Votre exhortation me confirme dans le dessein que j'ay de donner quelque traité qui explique les fondements et les usages du calcul des sommes et des différences et quelques matières connexes. J'y adjouterai par manière d'appendice les belles pensées et découvertes de quelques géomètres qui ont bien voulu s'en servir, s'ils veulent avoir la bonté de me les envoyer. J'espère que M. le M. de l'Hospital [2] voudra bien nous faire cette faveur, si vous jugés à propos de le lui proposer. MM. Bernoulli frères en pourront faire autant. Si je trouve quelque chose dans les productions de de M. Newton insérées dans l'*Algebra* de M. Wallis, qui nous donne moyen d'avancer, j'en profiteray en lui rendant justice. Mais oserois-je bien vous supplier vous-même de me favoriser de ce que vous jugerés à propos, comme par exemple de votre analyse du problème de M. Bernoulli donnée par cette manière de calcul? . . . .

P. S. Je ne sçay quand je verray l'ouvrage que M. Wallis vient de publier. Voudriés-vous bien me faire la grâce, Monsieur, d'en faire copier des endroits où M. Newton donne des nouvelles découvertes. Je ne demande pas proprement sa manière de trouver des séries, mais s'il donne des moyens pour la converse des tangentes ou pour quelque chose de semblable. Car en m'écrivant autres fois il couvrit sa manière sous des lettres transposées. Il marquoit d'avoir deux façons, l'une plus générale, l'autre plus élégante. Je ne sçay s'il en aura parlé.

Extrait d'une lettre de Leibnitz *à* Huyghens, *en date du* $\frac{4}{14}$ *septembre* 1694. *Même ouvrage, pag.* 199 *et suiv.*

Je commence par vous remercier de la communication de l'extrait de l'ouvrage de M. Wallis touchant M. Newton. Je voy que son calcul s'accorde avec le mien, mais je pense que la considération des différences et des sommes est plus propre à éclairer l'esprit; ayant encore lieu dans les séries ordinaires des nombres et répondant en quelque façon aux puissances et aux racines. Il me semble que M. Wallis parle assez froidement de M. Newton et comme s'il estoit aisé de tirer ces méthodes des leçons de M. Barrow. Quand les choses sont faites il est aisé de dire : *et nos hoc poteramus.* Les choses composées ne sçauroient être si bien démêlées par l'esprit humain sans aide de charactères. Je suis bien aise de voir enfin le déchiffrement des énigmes contenues dans la lettre de M. Newton à feu M. Oldenbourg. Mais je suis faché de n'y point voir les nouvelles lumières que je me promettois pour l'inverse

---

[1] Leibnitz, né le 3 juillet 1646, mort le 14 novembre 1716.

[2] Le M. de l'Hospital, né en 1661, mort en 1704.

des tangentes. Car ce n'est qu'une méthode d'exprimer la valeur de l'ordonnée de la courbe demandée *per seriem infinitam*, dont je sçavois le fond dès ce temps là, comme je témoignay alors à M. Oldenbourg.

Extrait d'une lettre de Leibnitz *au M. de* l'Hospital, *en date du* 27 *décembre* 1694. *Correspondance de* Leibnitz *publiée par M.* Gerhardt, *tome II, pag.* 259 *et* 260.

Je reconnois que M. Barrow est allé bien avant; mais je puis vous assurer, Monsieur, que je n'ay tiré aucun secours pour mes méthodes. Je ne connoissois au commencement que les indivisibles de Cavalieri et les *Ductus* du P. Grégorie de Saint-Vincent, avec la *Synopsis geometrica* du P. Fabri, et ce qui se peut tirer de ces auteurs ou de leurs semblables. Lorsque M. Hugens me presta les lettres de Dettonville ou de M. Pascal, j'examinay par hasard sa démonstration de la mesure de la superficie sphérique, et j'y trouvay une lumière que l'auteur n'avoit point veue[1]............ M. Hugens fut surpris quand je lui parlay de ce théorême et m'avoua que c'étoit justement celuy dont il s'estoit servi pour la surface du conoïde parabolique; mais comme cela me faisoit connoistre l'usage de ce que j'appelle *le triangle caractéristique*, composé des éléments des coordonnées et de la courbe, je trouvay, comme dans un clin-d'œil, presque tous les théorèmes que je remarquay depuis chez MM. Gregory et Barrow à ce sujet. Jusqu'alors je n'estois pas encore assez versé dans le calcul de M. Descartes, et ne me servois pas encore des équations pour expliquer la nature des lignes courbes; mais sur ce que M. Hugens m'en disoit, je m'y mis et ne m'en repentis point, car cela me donna moyen de trouver bientost mon calcul différentiel. Voicy comment. J'avais pris plaisir longtemps auparavant de chercher les sommes des séries des nombres, et je m'estois servi pour cela des différences sur un théorême assez connu, qu'une série décroissant à l'infini, son premier terme est égal à la somme de toutes les différencea. Cela m'avoit donné ce que j'appelois le *triangle harmonique*, opposé au *triangle arithmétique* de M. Pascal. Car M. Pascal[2] avoit monstré comment on peut donner les sommes des nombres figurés, qui proviennent en cherchant les sommes et les sommes des sommes de la progression arithmétique naturelle; et moi je trouvay que les fractions des nombres figurés sont les différences et les différences des différences de la progression harmonique naturelle $\left(\text{c'est-à-dire des fractions } \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \text{etc.}\right)$ et qu'ainsi on peut donner les sommea des séries des fractions figurées, comme $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$, etc., et $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$, etc. Reconnoissant donc cette grande utilité des différences et

[1] J'omets une explication fort obscure, et qui est reproduite un peu plus loin en termes beaucoup plus clairs dans la lettre de Leibnitz à Jacques Bernoulli, en date d'avril 1703. [F.L.]

[2] Pascal, né en 1623, mort en 1662.

voyant que par le calcul de M. Descartes l'ordonnée de la courbe peut estre exprimée, je vis que trouver les quadratures ou les sommes des ordonnées n'est autre chose que trouver une ordonnée (de la quadratrice) dont la différence est proportionnelle à l'ordonnée donnée. Je reconnus aussi bientost que trouver les tangentes n'est autre chose que différentier, et trouver les quadratures n'est autre chose que sommer, pourvu qu'on suppose les différences incomparablement petites. Je vis aussi que nécessairement les grandeurs différentielles se trouvent hors de la fraction et hors du *vinculum*, et qu'ainsi on peut donner les tangentes sans se mettre en peine des irrationnelles et des fractions. Et voilà l'histoire de l'origine de ma méthode. Commej 'ay reconnu publiquement en quoy j'estois redevable à M. *Hugens* et à l'égard des séries infinies à M. *Newton*, j'en aurois fait autant à l'égard de M. *Barrow*, si j'y avois puisé. Pour l'inverse, c'est-à-dire pour trouver une formule ou équation absolue, dont on pourroit tirer une différentielle proposée, ou pour trouver une ordonnée dont la différence soit donnée, j'employai des formules générales, ce que M. *Tschirnhaus* fit aussi depuis pour les quadratures ordinaires. Mais il me semble qu'il ne s'y est pas assez bien pris encore, non plus que M. *Craig* qui s'est aussi trop borné. M. le professeur *Bernoulli* [1] paroist mépriser ces formules générales pour l'iuverse des tangentes; cependant vous verrés, Monsieur, par le papier ci-joint, que j'ay trouvé par là des théorèmes doot j'ay parlé.

Excerpta e Tomo primo operum Mathematicorum J. Wallisii [2], *anno* 1695 *in lucem edito. Ad lectorem Præfatio, pag.* 2 *et* 3.

Quæ in secundo volumine habentur, in præfatione eidem præfixa dicitur. Ubi (inter alia) habetur *Newtoni* Methodus de *Fluxionibus* (ut ille dicitur,) consimilis naturæ cum *Leibnitii* (ut hic loquitur) *Calculo differentiali*, (quod, qui utramque methodum contulerit, satis animadvertat, utut sub loquendi formulis diversis,) quam ego descripsi (*Algebræ cap.* 91, etc. præsertim *cap.* 95) ex binis *Newtoni* literis (aut earum alteris) *Junii* 13 et *Augusti* 24. 1676, ad *Oldenburgum* datis, cum *Leibnitio* tum communicandis (iisdem fere verbis, saltem leviter mutatis, quæ in illis literis habentur,) ubi methodum hanc *Leibnitio* exponit tum ante *decem* annos, nedum plures, ab ipso excogitatam. Quod moneo, nequis causetur, de hoc *Calculo differentiali* nihil à nobis dictum esse.

---

[1] Jacques Bernoulli, né en 1654, mort en 1705.

[2] *Johannis Wallis* S. T. D. *Geometriæ professoris* Saviliani *in celeberrima academia* Oxoniensi, *opera Mathematica. Volumen primum.* Oxoniæ, *e theatro Sheldoniano*, 1695.
Wallis, né en 1616, mort en 1703.

Excerpta ex Epistola D. J. Wallisii *ad D.* Leibnitium, Oxonii 1 *Dec.* 1696 *data. Excerptis, in* Comm. Epist. *editis pag.* 159, *hæc subjunguntur*[1].

Gerhardt IV } 11

Nolim autem Celeberrimum Editorem dubitare (quod præcavere satagit) quin ego Vestratibus et Inventis vestris, favere fuero proclivis; non autem invidere, vel extenuare; qui aliorum inventa soleo candide æstimare, aut etiam *benigna* interpretatione adjuvare; (quod de *Cavallerii* methodo *indivisibilium* factum puto; quam ego sic expono ut Mathematicum ferre possit rigorem, à quorundam Exceptionibus libera:) qui plurima *Brounkeri, Wrenni, Nelii, Hugenii, Mercatoris, Newtoni, Caswelli*, aliorumque inventa conservavi, quæ, nisi ego ediderim, forte periissent (dum ipsi sua edere neglexerint,) de Tuis paria facturus, si ad manus meas pervenerint.

Initium Epistolæ D. Leibnitii *ad* Wallisium *scriptæ*, $\frac{19}{29}$ Martii 1697. *Superius pag.* 161.

} 11

Literæ tuæ, beneficio D. *Cresseti*, Ablegati (ad Aulas nostras) Regii, mihi sunt redditæ. Quibus non tantum schedæ cuidam meæ humanissime respondes, desiderioque meo satisfacis; sed et, occasione Recensionis operum tuorum mense *junio* anni superioris in *Actis Lipsiensibus* exhibitæ, quædam monita erudita, et (ut verbo dicam) Te digna mecum communicas.

Et quoniam, etc.

Ex Epistola Wallisii *ad D.* Leibnitium, Apr. 6. 1697. *Suprà, pag.* 163.

Quod Methodos meas in Arithmetica infinitorum putaverit ad *integras tantum figuras* pertingere, et non item ad earum *partes;* indè factum credo, quod non satis attenderit ad Prop. 66; etc. . . . .

Sic ego distribuo semi-cycloidem (non ut Lanius sed ut Anatomista) in semicirculum et figuram arcuum; quibus separatim meas methodos adhibeo: est utique cycloïdis ordinata $f = a + s$, aggregata ex arcu et sinu recto; ejusque continua incrementa (quas vos differentias dicitis) aggregata ex incrementis horum. Et, ubi

[1] Les extraits de la correspondance de Wallis publiés dans le *Commercium* sont faits avec l'intention évidente de poser ce savant vénérable comme un champion non douteux de Newton. Telle n'a pas été l'attitude de Wallis, et nous cherchons à la présenter sous son véritable jour par la production de quelques passages supprimés. Ce qu'il y a de vrai, c'est que Wallis n'a jamais compris la portée des nouveaux calculs, et qu'il n'a rien vu d'essentiellement neuf, ni dans la méthode des fluxions, ni dans le calcul différentiel. Mes extraits, de même que ceux qui ont été donnés par les premiers éditeurs du *Commercium*, sont tirés du tome III des œuvres de Wallis. [F. L.]

ad curvam ipsam respicitur, Obliquitas Tangentis in quoque puncto (propter figuram arcuum ex loco suo detrusam et luxatam, ob interjectum semi-circulum) quæ est istius puncti obliquitas (angulum intelligo quem ad axem facit illa Tangens,) componitur ex Tangentium utriusque figuræ obliquitatibus (et quidem si tertia quartave interponeretur figura, componeretur ex omnium obliquitatibus.) Unde originem ducit *Newtoni Doctrina Fluxionum*, et Vester (si eum satis intelligo) *Calculus Differentialis*. Etc.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad* Wallisium *scripta*, 28 Maii 1697. *Suprà, pag.* 164.

Alteræ tuæ literæ, non minus ac priores, multis nominibus mihi gratissimæ sunt. Docent enim semper aliquid quod faciat ad scientiæ incrementum. Sed si vel hoc unum ostenderent, valere Te et nostri amanter meminisse; plurimum voluptatis afferrent. De æquitate tua et benevolo etiam in nostros animo, nunquam dubitavi, ejusque indicia dudum habui; atque adeo et ipse, data occasione, quanti Tua in scientias merita facerem ostendi. Etc.

. . . .

Dixi aliquando, in *Lipsiensibus* eruditorum *Actis*, mihi omnes Methodos Tetragonisticas ad duo summa genera reducendas videri : vel enim colliguntur in unum quantitates infinitæ numero, quantitate incomparabiliter minores toto; vel, semper manetur in quantitatibus toti comparabilibus, quarum tamen numerus infinitus est quando totum Exhauriunt. Utriusque Methodi specimina jam dedit *Archimedes;* sed nostrum seculum utramque longius produxit. Itaque, strictius loquendo, Methodus *Exhaustionum*, à Methodo *indivisibilium*, distingui potest : tametsi commune omnibus sit Principium Demonstrandi : ut error ostendatur infinite parvus, seu minor quovis dato; *Euclidis* jam exemplo.

Methodum fluxionum, etc.

P. S. Siqua esset occasio D. *Newtono*, summi ingenii viro, (forte per amicum) salutem officiosissimam à me nunciandi, eumque meo nomine precandi, ne se ab edendis præclaris meditationibus diverti pateretur; hoc beneficium à Te petere auderem.

Ex Epistola Wallisii *ad* Leibnitium, Julii 30, 1697. *Suprà, pag.* 168.

Questùs utique sum aliquoties, quod viri Magni suas Methodos nomine tenus venditant (quas apud sè clam celant) non autem in publicum exhibent, quænam illæ sint. Sic *Fermatius* antehac methodum suam de *Maximis* et *Minimis; Roberrallius* suam de *Compositione motuum; Freniclius* suam de *Exclusionibus;* nescio autem an eorum quisquam suam in publicum distincte tradiderit; sed hariolandum

nobis permiserunt, quales fuerint; aut, ut novas comminiscamur ipsi. Et siquid post factum est imperfecte factum est.

Optaverim item, etc. (vide pag. 168 [1]).

Quod *Analysis Infinitesimalis* latius pateat quam *Methodus Tetragonistica*, omnino recte mones. Est enim consideratio Arithmetica, multo simplicior et magis abstracta (quod *Savilius* noster olim monuit) quam est Geometrica; adeoque magis Generalis, aliisque materiis applicabilis; ejusque ad Geometriam accommodatio, est *unus casus* doctrinæ universalis. Quod probe norunt, qui *Euclidis Rationum* doctrinam, (Geometrice traditam in Lineis,) multo felicius exhibent in Arithmetica Speciosa.

Atque, hoc intuitu, *Cavallerii Geometriam Indivisibilium*, ego prosequor in mea *Arithmetica Infinitorum*. Et sectiones Conicas, Cono exemptas, ego tracto ut figuras in Plano, (per suas ipsarum affectiones expositas, à Cono abstractas,) non minus quam Circulum et Triangulum; quæ t ipsa sunt Sectiones Coni, (quod et D. *de Wit* post fecit.) Et *medium Arithmeticum* amplius extendo, cujus de *Centro Gravitatis* doctrina non est nisi unus Casus. Tuusque *Calculus Differentialis* latius patet quam ad Tetragonismos, aut etiam Curvarum Rectificationes. Etc.

. . . .

Quæ *Newtonum* spectant, ad eum scripsi tuis verbis; simulque obtestatus sum meo nomine, ut imprimi curet quæ sua supprimit scripta : Quod et sæpe ante feceram, sed hactenus in cassum.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad* Wallisium, 28 Sept. 1697.

Quæ meo nomine promisit D. Marchio *Hospitalius*, paulatim efformo, quantum per negotia alia bene multa licet.

Ex Epistola Wallisii *ad D.* Leibnitium, 21 Oct. 1697.

Non vacat jam de rebus Mathematicis quicquam addere; quia velim protinus absque mora (cum tu id petis) de receptis tuis literis te certiorem facere. Id saltem insinuare visum est, fieri forte posse, ut, una cum scriptis meis aliquot, quæ jam sub prelo sunt, *Newtoni* quædam intermisceam; simulque (nisi tu prohibeas) Literarum Tuarum aliquas, quæ ad manus meas pervenerunt, et quæ dignæ sunt ut non pereant.

[1] La première note latine, placée au bas de la page 168, constitue un contresens bien volontaire. Wallis exprime le désir que Leibnitz expose son *calcul différentiel* et Newton sa *méthode des fluxions*, afin que les savants puissent apprécier ce qu'ils ont de commun et en quoi ils diffèrent : il est si loin de demander à Leibnitz d'exposer la différence des méthodes, qu'il fait clairement entendre que les publications de Newton sont incomplètes, et qu'il lui a vainement demandé de les compléter. [F. L.]

Ex Epistola D. Leibnitii *ad* Wallisium, 24 Martii 1698.

Quæris, an patiar nescio quas literas meas (ad *Oldenburgum* fortasse) apud te repertas edi. Poteram petere, ut mecum antea communicentur : sed tamen satius putavi rem omnem tuo arbitrio permittere. Tametsi enim facilè intelligam, tumultuariè et à juvene scripta, cujus progressus adhuc erant mediocres, veniam faciliùs quàm laudem esse inventura; et si vestrorum exquisitis scriptis conjungantur, ipsa imparitate deteriora apparitura esse; cum, contrà, inter alias minorum gentium lucubrationes fortasse commendationem aliquam habuisse possim; atque adeo agnoscam (quod res est) magis vestræ gloriæ (cui ipse faveo) quàm famæ meæ hanc editionem esse velificaturam; quia tamen judicas inesse aliquid non mali, nolo defugere autoritatem tuam ; et commodo reipublicæ, etiam periculo opinionis meæ, servire sum paratus.

Ex Epistola Wallisii *ad D.* Leibnitium, 22 Julii 1698 [1].

Quumque hoc quod moneo adhibetur calculi compendium ; id quod superest, est reapse tuus calculus differentialis; (ut non sit ea tam res nova, quàm nova loquendi formula, utut Tu id forte non animadverteris,) etc.

Nec tamen id tibi imputandum est, aut vitio dandum, quod non animadverteris rem ipsam à me fuisse ante insinuatam ; sed sub alia verborum formula : cum non tibi magis incumbat mea vidisse omnia (et penitius examinasse) quam mihi tua. Nec sua caret utilitate, diversis itineribus ad id ipsum (seu quod æquipolleat) à pluribus perventum esse.

Ex Epistola D. Leibnitii *ad* Wallisium, 29 Decemb. 1698.

Quod *Calculum differentialem* attinet ; fateor multa ei esse communia cum iis quæ et Tibi, et *Fermatio* aliisque, uno jam ipsi *Archimedi* erant explorata ; fortasse tamen res multo longius nunc provecta est, ut jam effici possint quæ antea summis Geometris clausa videbantur, *Hugenio* ipso id agnoscente. Perinde fere se res habet ac in Calculo Analytico ad lineas Conicas altioresve applicato : quis non videt *Apollonium*, et veteres alios, habuisse Theoremata quæ materiam præbent æquationibus, quibus *Cartesius* postea lineas designare voluit? Interim methodo *Cartesii* res ad calculum reducta est, ut jam commode ac nullo negotio fiant, quæ antea

[1] Dans cette lettre, Wallis expose à nouveau la méthode des tangentes employée par lui en 1655, *de conicis sectionibus*, expliquée avec plus d'étendue dans les *Transactions philosophiques* pour mars 1672, et transcrite de là dans son Algèbre, chap. 95. [F. L.]

multo meditationis et imaginationis labore indigebant. Eodem modo *Calculò* nostro *differentiali* etiam Transcendentia Analyticis operationibus subjiciuntur, quæ inde antea excluserat ipse *Cartesius*.

Ex Epistola Wallisii *ad D.* Leibnitium, 16 Jan. 1699.

Quod tuus *calculus differentialis* multa habet cum aliorum sensis communia, etiam ipsius *Archimedis*; tu (pro candore tuo) libere profiteris : non tamen est inde minus æstimandus. Nam multa sunt, quorum prima fundamenta fuerint Veteribus non ignota; ita tamen intricata et difficultatis plena, ut sint ea (nostra ætate) reddita multo dilucidiora et usibus aptiora. (Ut, ne plura nominem, *Indorum Algorithmus* per Figuras Numerarias, et Nuperorum *Calculus Analyticus* seu *Arithmetica speciosa*; item *Conicarum Sectionum* Exemptio è Cono in Planum; aliaque plurima quæ præsens ætas Veterum inventis superaddidit.) Adeoque, ut nollem Veteres sua laude fraudare, (quorum Fundamentis nos plura superstruximus;) ita nec Modernos sufflaminare velim ne porrò procedant; sed Incitare potius; et Te præ cæteris.

Extrait d'une lettre du M. de l'Hospital *à* Leibnitz, *en date du* 13 *juillet* 1699. *Correspondance publiée par M.* Gerhardt, *tome II, page* 336.

Je ne sçais si vous êtes instruit que *Wallis* a fait imprimer un troisième tome de ses Œuvres mathématiques dans lequel il a inséré quelques-unes de vos lettres à M. *Newton* et autres, et cela, je crois, dans la pensée d'attribuer à ce dernier l'invention de votre calcul différentiel que *Newton* appelle des fluxions. Il me paroist que les Anglois cherchent en toute manière d'attribuer la gloire de cette invention à leur nation.

Excerpta è dissertatione Nicolai Fatii Duillierii *de investigatione Geometrica* lineæ brevissimi descensus [1], etc. *Suprà pag.* 168.

Quæret forsan Cl. *Leibnitius*, unde mihi cognitus sit iste calculus, quo utor? Ejus equidem Fundamenta universa, ac plerasque regulas, PROPRIO MARTE, anno 1687, circa mensem Aprilem et sequentes, aliisque deinceps annis, INVENI; quo tempore neminem eo calculi genere, præter me ipsum, uti putabam. Nec mihi minus cognitus foret, si nondum natus esset *Leibnitius*. Aliis itaque glorietur Discipulis, me certe non potest. Quod plus satis patebit, si olim literæ, quæ inter ela-

[1] *Nicolai Fatii Duillierii R. S. S. lineæ brevissimi descensus investigatio geometrica duplex. Cui addita est investigatio geometrica solidi rotundi, in quod minima fiat resistentia. Londini : Typis R. Everingham.....* 1699.

rissimum *Hugenium* meque, intercesserunt, publici juris fiant. *Newtonum* tamen primum, ... aliique ejusdem Manuscripti codices. Neque modestioris *Newtoni* silentium, aut prona *Leibnitii* sedulitas, inventionem hujus calculi sibi passim tribuentis, ullis imponet, qui ea pertractarint, quæ ipse evolvi, instrumenta [1].

Extrait d'une lettre de Leibnitz *au* M. de l'Hospital, *en date du* $\frac{28 \textit{ juillet}}{7 \textit{ août}}$ 1699. *Correspondance publiée par M.* Gerhardt; *tome II, page* 337.

Je vous remercie fort, Monsieur, de ce que vous avés bien voulu m'envoyer le traité de M. *Fatio*, où j'ay tant d'intérest. Il y paroist beaucoup de passion. Si c'est envie, ou émulation, ou autre chose, je n'en sçay rien. S'il en a tant sçu depuis si longtemps, pourquoy ne l'a-t-il point fait connoistre?......

Il donne à mes paroles un sens qu'elles n'ont point. Je ne dis point que ceux que j'ay connus soyent les seuls, qui ayent pû résondre ce problème. Mais je marque qu'il n'y a que ceux qui entendent nostre calcul, qui le puissent, et c'est pour obliger les géomètres à s'appliquer à une chose utile.

Je n'espère point que M. *Newton* approuvera les expressions de M. *Fatio*. Il connoist mieux la vérité. M. *Wallis* a demandé mon consentement pour l'édition de mes vieilles lettres, et il a même adjouté que je pourrois retrancher ce que je jugerois à propos; mais comme je n'ay rien à craindre de la vérité toute nue, j'ay répondu qu'il pourroit publier ce qu'il en jugeroit digne. Il m'en envoye un exemplaire, mais je ne l'ay pas encore reçeu.

Comme les emportements de M. *Fatio* ne me touchent guères, je lui répondray sans beaucoup d'émotion. Car ces manières piquantes ne marquent ny politesse ny équité.

---

[1] Ce Fatio de Duillier, que sir D. Brewster appelle *an eminent mathematician* †, mériterait à plus juste titre la qualification de *rogue*, que Keill donne si libéralement aux éditeurs des *Actes de Leipsick* dans les épanchements d'une correspondance intime avec Newton ††. Fatio naquit à Bâle en 1664 et mourut à Londres en 1753. Il fut successivement, conspirateur, délateur, géomètre, prophète, condamné et exposé au pilori. On doit regretter que Newton ait accepté, peut-être même recherché un pareil auxiliaire †††. [F. L.]

† *Life of sir Isaac Newton..... by sir D. Brewster;* vol. II, pag. 37.

†† Ibid., *pag.* 54.

††† Consulter un article de M. Biot sur la correspondance d'Huyghens publiée par le professeur Uylenbroek, *Journal des Savants, mai* 1834.

Excerpta ex Actis Lipsiensibus, *Mens.* Maii 1700. *pag.* 198 *et seq.* G. G. L. *Responsio ad D.* Nic. Fatii Duillierii *imputationes.*

Cum ad me pervenisset tractatio D. *Nic. Fatii Duillerii* de curva brevissimi descensus, solidoque minimam (in medio) resistentiam habente, nuper *Londini* edita; miratus sum non mediocriter, virum a me nunquam læsum animi tam male erga me affecti indicia dare. Etc.

Ait jam anno 1687 proprio se Marte invenisse fundamenta universa et plerasque regulas calculi quem nos differentialem vocamus. Credamus ita esse, (saltem pro parte, nam ne nunc quidem omnia hujus calculi fundamenta ipsi satis nota putem; et si ea fiducia, tanquam cuncta jam effuderimus, promptior ad provocandum factus fuisse videatur) jam manifestariam tenemus causam animi a me alienioris, quam fortasse ipse non satis animadvertit : uti in versu est, *non amo te, nec possum dicere quare.* Etc.

Hactenus D. *Duillierius* vel suam vel publicam, ut putabat, rem egit : nunc vero cum eminentis Geometræ *Is. Newtoni* aliorumque etiam causam, tanquam contra me suscipit; ignoscet mihi, si non ad omnia respondeo, donec mandatum procuratorium tum à cæteris tum maxime à D. *Newtono* ostendat, cum quo nulla mihi simultas fuit. Certe vir egregius aliquoties locutus amicis meis semper bene de me sentire visus est, neque unquam, quod sciam, querelas jecit : publice autem ita mecùm egit, ut iniquus sim, si querar. Ego vero libenter ejus ingentia merita oblatis occasionibus prædicavi, et ipse scit unus omnium optime, satisque indicavit publice, cum sua *Mathematica Naturæ Principia* publicaret anno 1687, nova quædam inventa Geometrica, quæ ipsi communia mecum fuere, neutrum luci ab altero acceptæ, sed meditationibus quemque suis debere, et a me jam decennio ante exposita fuisse. Certe, etc. (*in Com. Epist. pag.* 168)..... mature transmisit. Cæterum etsi post tanta jam beneficia in publicum collata, iniquum sit aliquod à D. *Newtono* exigere, quod novum quærendi laborem postulet, non possum tamen mihi temperare, quin hac oblata occasione maximi ingenii Mathematicum publice rogem, ut memor humanorum casuum, et communis utilitatis, diutius ne premat præclaras reliquas ac jam paratas meditationes suas, quibuscum scientias mathematicas, tum præsertim naturæ arcana porro illustrare potest. Quod si nulla movet tantarum gloria rerum (quanquam vix quicquam ei, quam nactus est, addi possit [1]) illud saltem cogitet, generosum animum nihil magis ad se pertinere putare, quam ut optime de humano genere mereatur. Etc.

Interim considerandum relinquo, qua ipse æquitate dissimulet, aut qua animi præventione obliviscatur, non hic de problemate aliquo particulari lineæ brevissimi descensus, sed de methodo summi momenti valdeque diffusa circa maxima et

[1] Leibnitz répare noblement ici les torts du *Tentamen.* [F. L.]

minima fuisse actum : quam ante D. *Newtonum*, etc. (*in Com. Epist. pag.* 169) communicavit : cum tamen constet, esse methodi de maximis et minimis partem sublimiorem, et in applicatione Geometriæ ad mechanicen naturamque summe utilem, cum ex omnibus figuris possibilibus eligitur ad aliquid præstandum aptissima. Magnum sane Geometram *Huddenium* de his jam cogitasse apparet; sed quid consecutus sit, non constat. *Hugenius* certe (quamvis et ipse in Geometria ante detectum à me calculum recepta summus) tamen narrante D. *Duillierio*, tale quid frustra tentâvit : haud dubie quod nondum tunc satis usum nostrarum artium perspexisset, quem ubi tandem agnovit, mire illis et methodis, et (quæ D. *Duillierius* adeo aversatur) problematis, est delectatus, candideque fassus, publice ac privatim, jam apertum ad illa aditum, quæ alia ratione vix sperari posse videbantur.

Ex Epistola Leibnitii *ad* Jac. Bernoullium, *April.* 1703 *data. Integra extat in tomo tertio D.* Gerhardt, *pag.* 66-73.

Dici non potest, quam gratæ mihi literæ Tuæ fuerint, his duobus exceptis, quod Te non optime valere, ac deinde quod Te de meo affectu subdubitasse testantur. Etc.

Cæterum an eam mihi animi parvitatem tribuis, ut tibi vel illi [*fratri Joh. Bernoullio* [1]] succenseam, si quos in *Barrorio* usus perspexistis, quos mihi inventionum contemporaneo ab eo petere necesse non fuit. Nondum apparuerat prima editio *Lectionum Barrovii* [2], cum aliquot foliorum centenarios impleveram duplici genere meditationum, uno per *assignabilia*, ut vocabam, ubi ad modum *Cavallerii* et *Gregorii à S. Vincentio* ratiocinabar; altero per *inassignabilia*, ubi et *triangulo*, quod jam tum *characteristicum* vocaveram, utebar, idque credebam meum inventum, cui occasionem dederat quædam demonstratio apud *Pascalium* et *Dettonvillæum*, qui ipse ejus usum non perspexerat. Hinc et dimensiones spatiorum et curvarum et superficierum rotatione genitarum ducebam multimode, quorum magnam partem postea alibi apud alios inveni, neque tanti ipsa visa sunt, cum ad fontem, nempe calculum differentialem perveni. Etc.

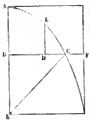
P. S. An eam in me animi parvitatem putas, ut vel tibi, vel D. fratri tuo, vel cuiquam alteri succenseam, si vos in Barrovio usus perspexistis, quos mihi inventionum contemporaneo ab eo petere necesse non fuit. Cum Parisios appulissem anno Christi 1672, eram ego Geometra autodidactos, sed parum subactus, cui non erat patientia percurrendi longas series demonstrationum. Algebram *Lanzii* cujusdam puerilem, deinde *Clavii* puer consulueram; *Cartesii* implicatior visa erat. Videbar tamen ipse mihi nescio qua satis credo temeraria ingenii fiducia par et his

---

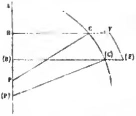
[1] Jean Bernoulli, né en 1667, mort en 1748.

[2] La première édition des *Leçons de Géométrie* par Isaac Barrow, a paru à Londres en 1669. [F. L.]

faturus si vellem. Audebamque inspicere libros profundiores, ut *Cavallerii* Geometriam et *Leotaudi* amoeniora curvilineorum elementa, quæ forte *Noribergæ* inveneram, et similia quædam plane sine cortice nataturus. Nam pene legebam ut Historias Romanenses. Interim quendam calculum mihi Geometricum fingebam per quadratilla et cubilos incertis numeris exprimendos; ignarus hæc omnia *Vietam* et *Cartesium* melius elaborasse. In hac pene dixerim superba Matheseos ignorantia ego historias et jura circumspiciebam, quod illis studiis me destinassem. Ex Mathesi jucundiora libabam, Machinas imprimis cognoscere atque invenire amans; nam et Arithmetica mea Machina illius temporis partus fuit. Cum forte *Hugenius*, qui plus credo in me quærebat quam erat, exemplum mihi sui de Pendulis libri recens editum pro humanitate sua attulit. Id mihi accuratioris Geometriæ initio vel occasio fuit. Dum sermones cædimus, animadvertit me non satis rectam habere notionem centri gravitatis, eam ergo indicavit paucis; simul addidit *Dettonvillæum* (hoc est *Pascalium*) talia egregie executum. Ego qui semper hoc habui eximium, ut essem mortalium docillimus, sæpeque luce ex unius magni viri verbis pauculis hausta innumera mea meditata nondum matura delevi: statim arripere monita summi Mathematici: nam quantus esset *Hugenius* facile perspiciebam. Accedebat pudoris stimulus, quod visus essem rem talem ignorare. Itaque *Dettonvillæum* peto a *Buotio*, *Gregorium Vincentiadem* ex Bibliotheca Regis, jam serio Geometram acturus. Nec mora illos ductus *Vincentii*, illas ungulas a *Vincentio* cœptas, a *Pascalio* promotas; tum illas summas et summarum summas nataque diverse solida et resoluta, cum jucunditate spectabam; plus enim voluptatis quam laboris afferebant. In his eram, cum forte incido in demonstrationem *Dettonvillæi* specie levissimam, qua probat dimensionem *Archimedeam* superficiei sphæræ et ex triangulorum EDC et CBK similitudine ostendit, fore CK in DE = BC in EC, adeoque ponendo BF = CK, fore rectangulum AF æquale momento curvæ AEC ex axe AB. Hæc ratiocinandi novitas me percussit; neque enim animadverteram apud *Cavallerianos*. Sed nihil magis obstupui, quam quod *Pascalius* fato quondam velatos oculos habuisse videretur;



statim enim videbam generalissimum esse theorema pro quacunque curva, etsi perpendiculares in uno centro non concurrerent, si modo perpendicularis a curva ad axem in ordinatam transferretur, ut PC vel (P) (C) in BF vel (B) (F), manifestum erat zonam FB (B) (F) F æquari momento curvæ C (C) ex axe. Ego statim eo ad *Hugenium*, quem nondum revideram: dico me obsecutum ejus monitis, jam posse aliquid, quod neque *Pascalius* habuisset. Et theorema generale pro momentis curvarum expono. Ille admiratus, atqui, inquit, hoc ipsum theorema est, cui innituntur meæ constructiones pro superficie-



bus Conoidum parabolicorum, Ellipticorum et Hyperbolicorum explanandis, quæ quomodo inventa essent, *Robervallius* et *Bullialdus* nunquam sapere potuerunt. Itaque applaudens ipse progressibus meis, quæsivit, possemne jam curvarum quales FF naturas invenire. Cum negarem me in ea inquisitione exercitatum, ipse *Cartesium* et *Slusium* inspicere jussit, qui æquationes locales conficere docuissent; id enim aiebat esse percommodum. Ex eo Geometriam *Cartesii* examinavi *Slusiumque* adjunxi ingressus profecto in Geometriam per posticum. Cum vero successus blandiretur, et innumera sub manibus nascereutur, aliquot centena folia eodem anno implevi, quæ in duo genera distinguebam, Assignabilium et Inassignabilium; ad assignabilia referebam, quæcunque consequebar iis viis anterioribus, quibus *Cavallerius, Guldinus, Torricellius, Gregorius à S. Vincentio, Pascalius,* erant usi; summis, summis summarum, transpositionibus, ductibus, cylindrisque per plana truncatis, per viam denique centri gravitatis. Inassignabilibus ascribebam, quæ adhibito triangulo illo quod jam tum vocabam characteristicum, similibusque aliis consequebar, et quorum initia *Hugenius* et *Wallisius* dedisse mihi videbantur. Paulopost incidit in manus meas Geometria Universalis *Jac. Gregorii Scoti*, huic videbam eandem artem esse perspectam (quamvis demonstrationibus ad morem Veterum obscuratam,) quemadmodum et *Barrovio* demum cum ejus Lectiones prodirent, ubi magnam partem meorum theorematum præreptam vidi. Parum tamen movebar, cum obvia esse viderem semel his imbuto tironi, animadverteremque superesse multo altiora, sed quæ novo calculi genere indigerent. Unde Arithmeticam meam Quadraturam similiaque, licet magno plausu *Galli Anglique* excepissent, nec editione digna putabam, pertæsus hærere in minutis, dum se Oceanus quidem aperiret. Cætera ut processerint nosti, et comprobant literæ meæ ab *Anglis* ipsis editæ.

Ex Epistola Jo. Keill *ex Æde Christi Oxoniensis A. M. ad cl. Virum* Edmundum Halleium [1] *Geometriæ Professorem Savilianum, de legibus virium centripetarum. Impressa est in* Philosophicis Transactionibus A. C. 1708, *mensibus* Septembri et Octobri, *pag.* 174-188.

Hæc omnia sequuntur ex celebratissima nunc dierum Fluxionum Arithmetica, quam sine omni dubio Primus invenit D. *Newtonus*, ut cuilibet ejus Epistolas à *Wallisio* editas legenti, facile constabit; eadem tamen Arithmetica postea, mutatis nomine et notationis modo, à D. *Leibnitio* in *Actis Eruditorum* edita est.

Sententia arbitrorum Consessûs, superiùs impressa, n° LXXXVI, *pag.* 182 *et seq.*

Le sommaire du n° LXXXVI fait suffisamment connaître l'objet de la mission donnée par la Société Royale au Comité qu'elle avait institué; mais on remarque avec

---

[1] Halley, né en 1656, mort en 1741.

étonnement l'absence de toute signature à la suite du Rapport. Newton se borne à dire dans le *Recensio : Numerosus quippe consessus erat, e viris eruditis diversarum nationum lectus*; et dans une lettre à l'abbé Conti, sous la date du 26 février 1716, il déclare que les matériaux du *Commercium Epistolicum* « *were collected and* « *published by a numerous committee of gentlemen af different nations.* »

En fait, les Commissaires nommés furent :

Le 6 mars 1712, Arbuthnot, Hill, Halley, Jones, Machin et Burnet, tous Anglais;
Le 20 — Robarts, Anglais.
Le 27 — Bonet, ministre de Prusse;
Le 17 avril — De Moivre, refugié français; Aston et Brook Taylor, Anglais.

Le Rapport a été écrit de la main de *Halley*.

Les noms des six commissaires primitivement choisis (six seulement et tous Anglais) ont été rapportés par Turnor dans l'ouvrage intitulé : *Collections for the history of the town and soke of Grantham*, in-4°, 1806. Les noms des cinq autres commissaires ont été donnés pour la première fois par M. le professeur *A. de Morgan*, en 1846, dans un intéressant article inséré aux *Philosophical Transactions : On a point connected with the dispute between Keill and Leibnitz about the invention of fluxians*.

D'après Turnor (ouvrage ci-dessus cité, pag. 186), on lit sur les registres de la Société Royale à la suite du Rapport : « To which report the Society agreed, *nemine* « *contradicente*, and ordered that the whole matter from the beginning, with the « extracts of all the letters relating thereto, and M. *Keill*, and M. *Leibnitz*'s letters, « be published with all convenient speed that may be, together with the report of « the said Committee.

« Ordered, that D[r] *Halley*, M. *Jones*, and M. *Machin*, be desired to take care « of the said impression (which they promised), and M. *Jones* to make an estimate « of the charges, against the next meeting. »

Enfin, le procès-verbal de la séance du 8 janvier 1713 porte : « Some copies of the « book entitled *Commercium Epistalicum*, etc., printed by the Society's order being « brougth, the President ordered one to be delivered to each person of the Com- « mittee, appointed for that purpose, to examine it before its publicatiou. »

On doit remarquer que sur les onze Commissaires, il n'y avait d'étrangers que Bonet et de Moivre : ce dernier seul était géomètre. Il dut former son opinion merveilleusement vite, car sa nomination est du 17 avril et le Rapport a été lu à la Société Royale le 24 du même mois. Parmi les autres commissaires, plusieurs n'avaient d'autres titres scientifiques que d'être les amis de Newton. [F. L.]

Extrait du *Journal litéraire* [1]. May et Juin 1713. Tome I, pag. 208 et suivantes.
Extrait d'une Lettre de Londres.

La dispute de M. *Newton* et de M. *Leibnitz*, qui s'est élevée depuis quelques années sur l'invention du calcul différentiel, commence à intéresser la plupart des Mathématiciens de l'Europe, qui se déclarent les uns pour le premier, les autres pour le second. Les noms de ces deux Messieurs est l'éloge le plus grand que l'on peut faire de l'invention qu'ils disputent.

Voici ce qui a donné occasion à ce différend, et ce que notre Société Royale a déclaré à cet égard.

(*Suit une histoire abrégée du différend, telle qu'on la retrouve avec plus de détail dans le* Recensio.)

Il est impossible de vous envoyer un extrait de ce livre [*Commercium Epistolicum*.....], qui n'en est pas susceptible. Je me contenterai, pour vous donner une idée de ce qu'il contient, de joindre ici tout au long le Rapport des Commissaires que la Société avoit nommés pour examiner ce différend. On doit regarder ce Rapport des Commissaires comme le jugement de la Société [2]. J'y ajouterai une lettre [3] de M. Newton, dont il est parlé dans ce jugement d'une manière plus particulière que des autres papiers de ce Recüeil. Ces deux pièces suffiront pour vous faire voir sur quel fondement notre Société a jugé de ce différend en faveur de M. *Newton* : en attendant que vous puissiez voir toutes les pièces du procès, de part et d'autre, pour une plus ample information.

(*Suivent le Rapport du Comité et la lettre du* 10 *décembre* 1672, *imprimés ci-dessus pages* 182 *et* 83.)

Extrait du *Journal litéraire*. Novembre et Décembre 1713. Tome III, pag. 444 et suivantes.

Voici une pièce qui nous a été envoyée d'Allemagne. Nous espérons que l'auteur nous pardonnera les petits changements que nous avons pris la liberté d'y faire, et qui ne sont point du tout essentiels. Nous prendrons cette occasion de prier ceux qui voudront bien

---

[1] Le *Journal litéraire* était imprimé à La Haye chez T. Johnson.

[2] Le contraire a été positivement établi par la Société dans sa séance du 20 mai 1714, ainsi qu'on le verra plus loin. [F. L.]

[3] Il s'agit de la lettre de Newton à Collins, en date du 10 décembre 1672, lettre dont Oldenbourg n'a communiqué à Leibnitz qu'un extrait sans importance, sous la date du 26 juillet 1676. [F. L.]

nous envoyer des pièces pour ce journal, de ménager les personnes contre lesquelles elles écrivent......

Cet avertissement regarde aussi la pièce qui fait ces remarques, et qui a paru en Allemagne, imprimée en latin.

Remarques sur le différend entre M. de Leibnitz, *et M.* Newton.

La lettre insérée dans le premier tome du *Journal litéraire*, p. 206, et qui renferme un récit de ce différend, contient plusieurs choses, qui font voir que l'auteur de cette lettre a été mal informé. Il n'y a point eu autrefois de dispute sur ce sujet entre ces deux messieurs. M. *Newton* n'avoit jamais donné à connoître qu'il prétendit ravir à M. *de Leibnitz* la gloire d'avoir inventé le *calcul des différences;* et ce n'est que par ceux qui ont vu le *Commercium Literarium*, imprimé à *Londres* il n'y a pas longtemps, que M. *de Leibnitz* a sçû que M. *Newton* prenoit part, à ce que quelques personnes mal informées avoient avancé sur ce sujet. M. *de Leibnitz*, qui est à Vienne, n'a pas encore vû lui-même cet écrit.

Ce sçavant mathématicien n'a jamais communiqué ses raisons à la *Société Royale d'Angleterre*, croyant l'affaire trop évidente pour que cela fût nécessaire : Il avoit seulement écrit qu'il ne doutoit point que la *Société* et M. *Newton* même, ne désapprouvassent ce procédé. Ainsi la Société n'a pas pu examiner les raisons de part et d'autre, pour prononcer là-dessus.

Voici maintenant un raport véritable de ce qui s'est passé. Il y a environ quarante ans qu'il y eut un commerce de Lettres entre MM. *de Leibnitz, Oldenbourg, Newton, Collins* et autres. Quelques-unes de ces Lettres ont été publiées dans le troisième volume des OEuvres mathématiques de M. *Wallis*. On y voit que M. *Newton* faisoit mistère d'une chose qu'il disoit avoir découverte, et que depuis il a voulu faire passer pour le calcul des différences. M. de Leibnitz, au contraire, lui communiqua franchement les fondemens de ce calcul, comme ces mêmes Lettres, publiées par M. *Wallis* en font foi; quoiqu'il se soit trouvé que M. *Newton* ne l'ait pas bien compris, surtout par raport aux différences des différences. On a encore trouvé depuis d'autres Lettres de M. *Collins* et de ses amis, et on les a publiées maintenant à *Londres* avec des additions, dans lesquelles on prétend, sur de simples conjectures et sur de fausses suppositions, que le calcul des différences est dû à M. *Newton*, et que M. *de Leibnitz* l'a apris de lui : quoique le contraire se voye clairement, et en termes exprès, dans leurs Lettres, publiées par M. *Wallis*.

L'auteur de ces additions a jugé avec témérité sur des choses dont il n'étoit pas bien instruit, et il a fort mal rencontré, quand il a voulu deviner, comment M. *de Leibnitz* étoit parvenu à son invention. Il s'est trouvé de plus, que M. *Newton* n'a pas encore connu le véritable calcul des différences en 1687, lorsqu'il a publié son livre intitulé *Philosophiæ naturalis principia mathematica:* car outre qu'il n'en a rien fait paroître, quoi qu'il eut de belles occasions de le faire valoir, il a de plus fait des fautes, qui ne pouvoient pas être compatibles avec la connoissance de ce calcul;

ce qu'un illustre mathématicien fort impartial a remarqué le premier. M. *de Leibnitz* avoit déjà publié son calcul quelques années auparavant, en 1684, et M. *Newton* n'a jamais communiqué rien d'approchant, à qui que ce soit que l'on sache, ni en public, ni en particulier, que longtems après la publication de ses *Principes*, c'est-à-dire, lorsque M. *Wallis* eu 1693 publia ses *Œuvres mathématiques*, et lorsque l'invention de M. *de Leibnitz* étoit déjà célèbre, et pratiquée publiquement avec beaucoup de succès et d'applaudissement, surtout par MM. *Bernoulli* frères. Quand on considère ce qui a été publié par M. *Wallis*, on voit d'abord que l'invention de M. *de Leibnitz* y paroit sous d'autres noms et d'autres caractères, mais bien moins convenables. Cependant M. *Newton*, ni alors ni longtemps après, n'a pas troublé M. *de Leibnitz* dans la possession de l'honneur de sa découverte : il n'en a parlé, qu'après la mort de MM. *Huyghens* et *Wallis*, qui étoient bien instruits et auroient pu être juges impartiaux de cette affaire. M. *Leibnitz* avoit cru jusqu'à présent sur la parole de M. *Newton*, que ce dernier pouvoit avoir trouvé quelque chose de semblable au *calcul différentiel*, mais on voit maintenant le contraire. On a publié là-dessus le jugement impartial d'un illustre mathématicien : ce jugement est fondé sur le long silence et sur les fautes de M. *Newton*.

Voici une traduction de la pièce latine où se trouve ce jugement.

« M. *de Leibnitz*, qui est à présent à Vienne, n'a pas encore vû un petit Livre « imprimé depuis peu en Angleterre, dans lequel on avance que M. *Newton* a in« venté le premier le *calcul différentiel*. On a pourtant crû qu'on ne devoit pas tar« der à y répondre de peur que le tems ne donnât quelque poids à cette suppo« sition.

« La différence de tems est trop grande, pour qu'on puisse nier que M. *de Leib« nitz* ne soit le premier qui ait publié cette nouvelle analise, dont ses amis et lui « se sont servis publiquement. Ce n'a été que plusieurs années après que M. *New« ton* a donné un calcul semblable à celui *des différences*, sous le nom de *calcul des « fluxions*, dans lequel il employoit d'autres noms et d'autres signes ; et dans ce « tems là il n'a encore rien disputé à M. *de Leibnitz*. Il n'y a rien qui fasse voir « sur quoi on se fonde maintenant, quand on soutient que c'est de M. *Newton* que « M. *de Leibnitz* a appris son calcul ; M. *Newton* n'ayant rien communiqué là-dessus, « à qui que ce soit, que l'on sache, avant que de publier le sien. Il est pourtant « vrai que M. *de Leibnitz* avoit crû M. *Newton* sur sa parole, quand il s'étoit dit « inventeur du calcul des fluxions ; c'est sur cela que M. *de Leibnitz* a écrit, qu'il « sembloit que M. *Newton* avoit trouvé quelque chose de semblable au calcul des « différences. Mais ayant appris en dernier lieu, que des gens en Angleterre, par « un amour mal entendu pour leur nation, ne se contentoient pas de faire partager « à M. *Newton* l'honneur de l'invention, mais qu'ils vouloient en exclure M. *de « Leibnitz* entièrement et que M. *Newton* même étoit de leur parti, ce procédé a « fait croire à M. *de Leibnitz* que le calcul des fluxions pouvoit bien avoir été formé « sur le calcul des différences, et c'est à quoi il n'auroit jamais pensé sans cela,

« étant prévenu en faveur de M. *Newton*. N'ayant pas à présent le tems d'examiner « lui-même cette affaire, il s'en est remis au jugement d'un très fameux mathématicien, impartial et fort capable d'en juger. Voici ce que ce mathématicien en a « écrit dans une lettre du 7 juin 1713. »

Suit la traduction française du Judicium Mathematici, *imprimé ci-dessus, pag.* 185.

« Voilà ce qu'a écrit le mathématicien dont on a parlé.

« On voit par là que M. *Newton* auroit dû se contenter de l'honneur d'avoir per« fectionné la *synthèse* par les lignes *infiniment petites* qu'on nommoit autrefois im« proprement les indivisibles, et qu'il n'auroit dû rien prétendre à ce qu'on a « trouvé dans l'*Analyse* par cette route; je parle du *calcul des différences* que M. *de* « *Leibnitz* a trouvé d'abord pour les nombres, et qu'il a ensuite appliqué à la Géo« métrie.

« On dit aussi que MM. *Hook* et *Flamsteed* se sont plaints que M. *Newton* leur « enlevoit l'honneur qui leur étoit dû, au premier touchant l'hipothèse des Pla« nètes, et au second touchant l'usage des Observations. On pourroit encore se « plaindre de M. *Newton*, s'il approuve (comme on pourroit le croire par son in« dulgence) l'accusation que quelques-uns de ses partisans font à M. *de Leibnitz*, « d'avoir pris de *Gregory* la *suite*, qui exprime la grandeur d'un arc de cercle par sa « Tangente. Les Anglois et les Ecossois, MM. *Wallis, Hook, Newton* et *Gregory* le « jeune, qui est, à ce que je crois, un neveu du premier, ont ignoré pendant plus « de trente-six ans que *Gregory* eût trouvé quelque chose de semblable, et tous « ont avoué que M. *de Leibnitz* en étoit l'inventeur. D'abord que M. *de Leibnitz* eût « trouvé cette suite, il envoya à M. *Huygens*, qui étoit à Paris, la méthode dont il « s'étoit servi pour imiter la suite de *Mercator*, qui a le premier inventé ces sortes « de solutions. M. *Huygens* loüa cette méthode dans une de ses lettres, et, peu de « temps après, M. *Newton*, à qui elle fut communiquée, avoüa qu'elle étoit entière« ment nouvelle, et qu'il ne savoit pas que personne s'en fût encore servi. M. *de* « *Leibnitz* donna ensuite, dans les Actes de Leipsick, une méthode générale pour « trouver les *séries*, elle se raporte aussi aux *ordonnées* des *courbes transcendentes*, « et il n'y emploie point les *extractions de racine*, dont M. *Newton* s'étoit servi; mais « sa méthode avoit été déduite de ce qu'il y a de plus profond dans le *calcul diffé*« *rentiel*, qui a beaucoup servi à perfectionner le calcul des *Suites*. Je ne m'étendrai « pas ici sur ce que M. *Newton* et ses disciples n'ont pas sçu le *calcul exponentiel*, « qui est le degré le plus parfait du *calcul transcendent*. M. *de Leibnitz* l'a employé le « premier, et M. (*Jean*) *Bernoulli* l'a trouvé ensuite par lui-même. Je ne m'arrête« rai pas non plus à faire voir, que quelques disciples de M. *Newton*, ont fait des « fautes quand ils ont voulu employer le calcul différentiel; comme on en voit un « exemple dans le Paralogisme de M. *Gregory* le jeune, touchant la courbe que « forme la chaîne suspendüe par ses deux bouts. Au reste, nous ne doutons point « qu'il n'y ait en Angleterre plusieurs savans qui désaprouvent la conduite des par-

« tisans de M. *Newton*. La faute de quelques particuliers ne doit pas être imputée à « toute la Nation. — 29 juillet 1713[1]. »

Extrait d'une lettre de M. Leibnitz *à M.* Chamberlayne *à Londres. Vienne le* 28 *Avril* 1714. *Recueil de* Des Maizeaux, *tome II*, *page* 120.

Je vous suis obligé..... de votre offre obligeante de moyenner une bonne intelligence entre Mr. *Newton* et moi. Un nommé Mr. *Keill* inséra quelque chose contre moi dans une de vos *Transactions philosophiques;* j'en fus fort surpris, et j'en demandai réparation par une Lettre à Mr. *Sloane* Secrétaire de la Société. Mr. *Sloane* m'envoya un discours de Mr. *Keill*, où il justifioit son droit d'une manière qui attaquoit même ma bonne foi. Je pris cela pour une animosité particulière de ce personnage, sans avoir le moindre soupçon que la Société, et même Mr. *Newton* y avoit part: et ne trouvant pas à propos d'entrer en dispute avec un homme mal instruit des affaires antérieures; et supposant d'ailleurs que Mr. *Newton* lui-même, mieux informé de ce qui s'étoit passé, me feroit rendre justice, je continuai seulement à demander la satisfaction qui m'étoit due.

Mais je ne sai par quelle chicane et quelle supercherie, quelques-uns firent ensorte qu'on prit la chose comme si je plaidois devant la Société, et me soumettois à sa juridiction, à quoi je n'avois jamais pensé; et selon la justice, on devoit me faire savoir que la Société vouloit examiner le fond de l'affaire, et l'on devoit me donner lieu de déclarer si j'y voulois proposer mes raisons, et si je ne tenois aucun des Juges pour suspect. Ainsi, on n'y a prononcé qu'*una parte audita*, d'une manière dont la nullité est visible. Aussi ne crois-je pas que le Jugement qu'on a porté puisse être pris pour un Arrêt de la Société.

Cependant Mr. *Newton* l'a fait publier dans le monde par un Livre imprimé exprès pour me décréditer, et envoyé en Allemagne, en France, et en Italie, comme au nom de la Société. Ce Jugement prétendu, et cet affront fait sans sujet à un des plus anciens Membres de la Société même, et qui ne lui a point fait déshonneur, ne trouvera guères d'Approbateurs dans le monde; et dans la Société même, j'espère que tous les Membres n'en couviendroient pas. Des habiles François, Italiens,

---

[1] Telle est la date que porte la lettre latine imprimée en Allemagne. Cette lettre était évidemment l'œuvre de Jean Bernoulli, et personne ne s'y méprit. Bernoulli fut blessé de l'indiscrétion qui résultait du mode de publication de ses arguments, et bientôt après la mort de Leibnitz, cet autre Disciple renia son Maitre: « Fallunt haud dubie, qui me tibi detulerunt tanquam auctorem « quarundam ex schedis istis volantibus, in quibus forsan non satis honorifica tui fit mentio. « Sed obsecro te, vir inclyte, atque per omnia humanitatis sacra obtestor, ut tibi certo persuadeas, « quidquid hoc modo sine nomine in lucem prodierit, id mihi falso imputari. » (*Lettre de Jean Bernoulli à Newton, en date du 5 juillet* 1719, *rapportée par sir D. Brewster,* Life of Newton, *tome II*, *page* 502.) Il serait d'ailleurs injuste de ne pas reconnaître que Leibnitz eut le plus grand tort d'engager Bernoulli dans sa querelle, sans son assentiment, et sous une forme aussi compromettante. [F. L.]

et autres désaprouvent hautement ce procédé, et s'en étonnent: et on a là-dessus des Lettres en main; les preuves produites contre moi leur paroissent bien minces.

Pour moi, j'en avois toujours usé le plus honnêtement du monde envers Mr. *Newton*; et quoiqu'il se trouve maintenant qu'il y a grand lieu de douter s'il a su mon invention avant que de l'avoir eue de moi, j'avois parlé comme si de son chef il avoit eu quelque chose de semblable à ma méthode. Mais abusé par quelques flatteurs mal avisez, il s'est laissé porter à m'attaquer d'une manière très sensible. Jugez maintenant, Monsieur, de quel côté doit venir principalement ce qui est nécessaire pour faire cesser cette contestation.

Je n'ai pas encore vu le Livre publié contre moi, étant à Vienne, qui est à l'extrémité de l'Allemagne, où de tels livres sont portez bien tard. Et je n'ai point daigné le faire venir tout exprès par la poste. Ainsi je n'ai pas encore pu faire une Apologie telle que l'affaire demande; mais d'autres ont déjà eu soin de ma réputation. J'abhorre les disputes désobligeantes entre les Gens de Lettres, et je les ai toujours évitées; mais à présent on a pris toutes les mesures possibles pour m'y engager. Si le mal pouvoit être redressé, Monsieur, par votre entremise, à laquelle vous vous offrez si obligeamment, j'en serois bien aise; et je vous en ai déjà beaucoup d'obligation par avance.

Lettre de M. Newton *à M.* Chamberlayne. *Le* 11 *Mai* 1714. V. S. *Recueil précité, page* 126.

Je n'entens pas assez à fond la Langue Françoise, pour sentir toute la force des termes de la lettre de Mr. *Leibniz;* mais je comprends qu'il croit que la Société Royale et moi, ne lui avons pas rendu justice.

Ce que Mr. *Fatio* a écrit contre lui, il l'a fait sans que j'y aye eu la moindre part.

Il y a environ neuf ans que Mr. *Leibniz* attaqua ma réputation, en donnant à entendre que j'avois emprunté de lui la Méthode des Fluxions. Mr. *Keill* m'a défendu; et je n'ai rien su de ce que Mr. *Leibniz* avoit fait imprimer dans le Journal de Leipsic, jusqu'à l'arrivée de sa première Réponse à Mr. *Keill,* où il demandoit, en effet, que je rétractasse ce que j'avois publié.

Si vous pouvez me marquer quelque chose en quoi je lui aye fait tort, je tâcherai de lui donner satisfaction; mais je ne veux pas rétracter ce que je sai être véritable, et je crois que le Committé de la Société Royale ne lui a fait aucun tort.

Lettre de M. Leibnitz *à M.* Chamberlayne. *Vienne le* 25 *Août* 1714. *Recueil précité, page* 128.

Je vous suis obligé de la tentative que vous avez faite à la Société Royale. L'Extrait de son Journal du 20. de Mai fait connoître qu'elle ne prétend pas que le rapport de ses Commissaires passe pour une décision de la Société. Ainsi je ne me

suis point trompé en croyant qu'elle n'y prenoit point de part. Quant à la Lettre peu polie, dont vous m'avez envoyé la copie, je la tiens *pro non scripta,* aussi bien que l'imprimé François. Je ne suis pas d'humeur de vouloir me mettre en colère contre de telles gens.

Puisqu'il semble qu'on a encore des Lettres qui me regardent, parmi celles de Mr. *Oldenbourg* et de Mr. *Collins,* qui n'ont pas été publiées, je souhaiterois que la Société Royale voulût donner ordre de me les communiquer. Car quand je serai de retour à Hanover, je pourrai publier aussi un *Commercium Epistolicum,* qui pourra servir à l'Histoire Littéraire. Je serai disposé de ne pas moins publier les Lettres qu'on peut alléguer contre moi, que celles qui me favorisent; et j'en laisserai le jugement au Public.

Extrait du *Journal litéraire.* Juillet *et* Août 1714. *Tome IV, page* 319 *et suivantes.*

Réponse de M. Keill, M. D. *Professeur d'Astronomie* Savilien, *aux auteurs des Remarques sur le différend entre M.* de Leibnitz *et M.* Newton, *publiées dans le Journal litéraire de la Haye de* Novembre *et* Décembre 1713 [1].

Quoy qu'on n'ait rien avancé dans le *Commercium Epistolicum* imprimé à *Londres* par ordre de la *Société Royale* en 1712, qui ne soit soutenu par des témoignages très authentiques, par des lettres originales, par des papiers signez de MM. *Newton, Leibnitz, Gregory, Oldenbourg* et *Collins,* et par des extraits des registres de la *Société Royale,* qui prouvent tous très clairement, que M *Newton* est le premier inventeur du *Calcul des Fluxions;* cependant trois Anonymes ont entrepris, de leur propre autorité, de décider cette dispute en faveur de M. *Leibnitz,* sans avoir égard aux argumens qui se tirent contre lui du *Commercium.* Le premier de ces auteurs est un Mathématicien fameux, employé par M. *Leibnitz,* pour examiner le *Commercium.* Le second est un auteur aussi employé par lui pour publier, en forme de lettre latine, le rapport du Mathématicien qui est en Allemagne : et le troisième est l'auteur des remarques sur ce différend prétendu.

Il faut avoüer qu'ayant résolu d'être les avocats d'une telle cause, ils ont fait très

---

[1] La réponse de Keill n'a pas moins de quarante pages d'impression. Il serait sans intérêt de la reproduire intégralement, car la substance, mise en œuvre avec plus d'habileté et de talent, se retrouve dans le *Recensio.* Keill n'a jamais été que le lieutenant ou le pseudonyme de Newton. La réponse, dont il est ici question, a été pour eux le sujet d'une correspondance très-suivie pendant les mois d'avril, de mai et de juin 1714. Dans ses lettres des 25 et 29 juin, Keill a envoyé à Newton le manuscrit complet de sa réponse à Bernoulli et aux *coquins* de Leipsick, afin que lui et le Dr Halley fassent les modifications ou retranchements qui leur sembleraient convenables. *In his* [Keill's] *letters of the 25th and 29th june, he sends* « the whole of his answer to Bernoulli and the « Leipsic ROGUES, for you and Dr Halley to change or take away what you please. » *Life of sir Isaac Newton by sir David Brewster, vol. II, pag.* 54. [F. L.]

sagement de s'en tenir à des généralitez, sans descendre aux arguments particuliers qu'on trouve dans le *Commercium*, et auxquels ils sçavoient qu'on ne pouvoit répondre. Etc...

. . . .

Voilà une réponse complète aux deux argumens mal fondez de ces avocats anonymes. Que si l'on se trouve obligé à répliquer encore, on est pourvû de preuves démonstratives qui font voir que M. *Newton*, dès l'année 1676 (qui est l'année qu'il écrivit les deux lettres que M. *Oldenbourg* envoya à M. *Leibnitz*) avoit plus perfectionné la *Méthode des Fluxions*, que M. *Leibnitz* n'a jamais pu faire depuis : et que pour lors M. *Leibnitz* n'avoit aucune connoissance de ce qu'il apelle à présent sa *Méthode différentielle*.

L'auteur de la lettre latine, pour appuyer ces deux foibles argumens, a trouvé à propos d'y joindre deux calomnies : l'une est que M. *Newton* avoit enlevé à M. *Hook* l'honneur qui lui étoit dû au sujet de l'hypothèse des planètes; l'autre qu'il avoit aussi ravi à M. *Flamsteed* l'honneur qui lui étoit dû au sujet de ses Observations. Pour ce qui est de M. *Hook*, M. *Newton* a été si éloigné de lui faire tort, qu'il le nomme expressément avec MM. *Wren* et *Halley*, comme ayant trouvé la loi des forces centripètes des planètes. Cependant on sçait très bien que M. *Hook* n'a jamais pu démontrer, que la loi de la gravité, qui peut faire mouvoir un corps dans une ellipse, doit être réciproque au carré de la distance : on lui offrit une gratification s'il pouvoit démontrer que cette loi pouvoit faire décrire à un corps une figure rentrante en elle même. M. *Leibnitz* lui même n'a pu le démontrer après M. *Newton*, sans commettre de Paralogisme; cependant nos auteurs conviendront sans doute qu'il est plus grand géomètre que M. *Hook*.

A l'égard de M. *Flamsteed*, M. *Newton* ne se sert jamais de ses observations sans en faire mention; il le fait très souvent dans le troisième livre de ses *Principes*, et on ne sçauroit faire voir qu'il ait jamais ravi à M. *Flamsteed* l'usage de ses observations [1]. Etc...

. . . .

M. *Leibnitz* censure aigrement M. *Descartes* d'avoir publié les découvertes des autres, et d'avoir celé les noms de ceux de qui il les tenoit; cependant il n'y a pas à beaucoup près tant de preuves, que M. *Descartes* eût pris ses idées des autres, qu'on en a que M. *Leibnitz* avoit publié les découvertes de MM. *Newton* et *Gregory*, sans en faire la moindre mention. Je finirai ceci par les paroles de M. *Leibnitz*, qu'on voit dans les *Actes de Leipsick* de 1690, pag. 231, où parlant de l'explication que *Descartes* donne de la pesanteur, comme étant prise de Kepler, il dit, *Hac ejus*

[1] Voyez à ce sujet :

An account of the rev. John. Flamsteed, the first astronomer royal, to which is added his British Catalogue of Stars, corrected and enlarged by Francis Baily. Londres, 1835.

Le supplément à cet ouvrage. Londres, 1837.

Les articles publiés par M. Biot dans le *Journal des Savants*, cahiers de mars, avril, novembre et décembre 1836, et octobre 1855. [F. L.]

[Kepleri] *cogitatione, quemadmodum et aliis plurimis in rem suam usus* Cartesius, *auctorem pro more suo* illaudabili *dissimulans*, etc..., *et sane licet vir summus fuit* Cartesius, *his tamen artificiolis multum solidæ laudis amisit apud judices intelligentes.*

Extrait d'une lettre de M. Leibnitz *à M. l'abbé* Conti [1]. *Décembre* 1715. *Recueil de* Des Maizeaux, *tome II, page* 2.

Il ne paroit point que Mr. *Newton* ait eu avant moi la Caractéristique et l'Algorithme infinitésimal, suivant ce que Mr. *Bernoulli* a très-bien jugé, quoiqu'il lui auroit été fort aisé d'y parvenir s'il s'en fut avisé; comme il auroit été fort aisé à *Apollonius* de parvenir à l'Analyse de *Descartes* sur les Courbes, s'il s'en étoit avisé. Ceux qui ont écrit contre moi n'ayant pas fait difficulté d'attaquer ma candeur par des interprétations forcées et mal foudées, ils n'auront point le plaisir de me voir répondre à de petites raisons de gens qui en usent si mal, et qui d'ailleurs s'écartent du fait. Il s'agit du Calcul des Différences, et ils se jettent sur les *Séries*, où Mr. *Newton* m'a précédé sans difficulté; mais je trouvai enfin une méthode générale pour les *Séries*, et après cela je n'avois plus besoin de recourir à ses extractions. Ils auroient mieux fait de donner les Lettres entiéres, comme Mr. *Wallis* a fait, avec mon consentement, et il n'a pas eu la moindre dispute avec moi, comme ces gens-là voudroient persuader au Public. Mes Adversaires n'ont publié du *Commercium Epistolicum* de Mr. *Collins* que ce qu'ils ont cru capable de recevoir leurs mauvaises interprétations. Je fis counoissauce avec Mr. *Collins* dans mon second voyage d'Angleterre; car au premier (qui dura très peu, parce que j'étois venu avec un Ministre public) je n'avois pas eucore la moindre connoissance de la Géométrie avancée, et n'avois rien vu ni entendu du Commerce de Mr. *Collins* avec Messieurs *Gregory* et *Newton;* comme mes Lettres échangées avec Mr. *Oldenbourg* en ce temps-là, et quelque temps après, le font assez voir. Mais à mon second voyage, Mr. *Collins* me fit voir une partie de sou Commerce, et j'y remarquai que Mr. *Newton* avoua aussi son ignorance sur plusieurs choses, et dit entr'autres, qu'il n'avoit rien trouvé sur la dimension des curvilignes célébres, que la dimension de la Cissoïde; mais on a supprimé tout cela. Je suis fâché qu'un aussi habile homme que Mr. *Newton* se soit attiré la censure de personnes intelligentes, en déférant trop aux suggestions de quelques flatteurs, qui l'ont voulu brouiller avec moi.

---

[1] Un ami commun, ou soi-disant tel, de Leibnitz et de Newton (l'abbé Conti, noble Vénitien), entreprit, en 1715, de les faire expliquer l'un avec l'autre; mais cela ne servit qu'à les aigrir davantage, et, en effet, l'abbé Conti ne joua, ce semble, que le rôle d'un médiateur très-partial ou très-maladroit, car Newton lui-même, quoiqu'il lui fût plus favorable qu'à Leibnitz, en fut fort mécontent. [*Montucla, Histoire des Mathématiques, tome III, page* 106.]

Extrait d'une lettre de M. Leibnitz *à M.* Rémond [de Montmort]. *Décembre* 1715. *Recueil précité, page* 13.

On pourra ajouter quelque chose à ma grande Apostille à M. l'Abbé *Conti.* Après ces mots *feront assez voir,* qui seront vers la fin de la première page de cette Apostille, ou guère loin du commencement de la seconde, on peut ajouter, *ce n'est qu'en France que j'y suis entré, et Mr.* Huygens *m'en a donné l'entrée.* Et à la fin du premier paragraphe, dans la seconde page après ces mots : *brouiller avec moi,* on peut ajouter, *la Société Royale ne m'a point fait connoître qu'elle voulût examiner l'affaire; ainsi je n'ai point été ouï; et si l'on m'avoit fait savoir les noms de ceux qu'on avoit nommez comme Commissaires, j'aurois pu m'expliquer, si je récusois quelques-uns, et si j'en désirois d'autres. C'est pourquoi les formalitez essentielles n'ayant point été observées, la Société a déclaré qu'elle ne prétend point avoir jugé définitivement entre Mr.* Newton *et moi.*

Extrait d'une lettre de M. l'abbé Conti à *M.* Leibnitz. *Mars* 1716. *Recueil précité, page* 15.

J'ai différé jusqu'à cette heure de répondre à votre Lettre, parce que j'ai voulu accompagner ma Réponse de celle que Mr. *Newton* vient de faire à l'Apostille que vous y avez ajoutée. Je n'entrerai dans aucun détail à l'égard de la dispute que vous avez avec Mr. *Keill*, ou plutôt avec Mr. *Newton.* Je ne puis dire qu'historiquement ce que j'ai vû, et ce que j'ai lû, et ce qu'il me manque encore de voir et de lire pour en juger comme il faut.

J'ai lu avec beaucoup d'attention, et sans la moindre prévention, le *Commercium Epistolicum*, et le petit Livre qui en contient l'*Extrait.* J'ai vu à la Société Royale les papiers originaux des Lettres du *Commercium :* une petite Lettre écrite de votre main à Mr. *Newton;* l'ancien Manuscrit que Mr. *Newton* envoya au Docteur *Barrow*, et que Mr. *Jones* a publié depuis peu. Etc.

Vos Amis attendent votre Réponse avec beaucoup d'impatience; et il leur semble que vous ne sauriez vous dispenser de répondre, si non à Mr. *Keill*, du moins à Mr. *Newton* lui-même, qui vous fait un défi en termes exprès, comme vous verrez dans sa Lettre. Etc.

Sa Majesté a voulu que je l'informasse de tout ce qui s'est passé entre Mr. *Newton* et vous. Je l'ai fait de mon mieux, et je voudrois que ce fût avec succès pour l'un et pour l'autre.

Extrait d'une lettre de M. le chevalier Newton [1] *à M. l'abbé* Conti, *servant de réponse à l'*Apostille *de M.* Leibnitz. 26 *Février* 1716. V. S. *Recueil précité, page* 20.

Vous savez que le *Commercium Epistolicum* contient les Lettres, et autres papiers de vieille date, qui ont quelque relation à la Dispute agitée entre M. *Leibnitz* et Mr. *Keil*, et qui ont été conservés dans les Archives de la Société Royale, ou dans la Bibliothéque de Monsieur *Collins*. Vous savez qu'ils ont été ramassez et publiez par un Committé nombreux et de personnes distinguées de plusieurs Nations, assemblé exprès par ordre de la Société Royale. Mr. *Leibnitz* jusqu'à présent a refusé d'y répondre, sachant bien qu'il est impossible de répondre à des matiéres de fait. Pour prétexte de son silence il allégua d'abord qu'il n'avoit point vu ce Livre, et qu'il n'avoit pas le loisir de l'examiner; mais qu'il avoit prié un Mathématicien fameux de vouloir bien se charger de ce soin. La Réponse du Mathématicien, ou prétendu Mathématicien, datée du 7 Juin 1713, fut insérée dans une Lettre diffamatoire, datée du 29. Juillet de la même année, et publiée en Allemagne, sans que le nom de l'Auteur, ni de l'Imprimeur, ni le lieu de l'impression y fussent marquez. Le tout a été depuis traduit en François, et inséré dans une autre Lettre du style de la première, et apparemment du même Auteur; à laquelle Mr. *Keil* répondit en Juillet 1714. Mais on n'a pas encore répliqué à cette réponse.

Monsieur *Leibnitz* met à présent un nouveau prétexte en usage, pour éviter de répondre; c'est qu'il ne veut pas que les Anglois ayent le plaisir de voir répondre à leurs petites raisons. Cependant, pour me donner le change, il tâche à m'engager dans des disputes Phylosophiques, et me propose des problêmes à resoudre; mais ces disputes et ces problêmes n'ont aucun rapport à l'affaire dont il s'agit. Etc.

Extrait d'une lettre de M. Leibnitz *à M. l'abbé* Conti. 14 *Avril* 1716. *Recueil précité, page* 30.

Pour ne vous point faire attendre, je vous dirai par avance que j'ai répondu d'abord à l'honneur de votre Lettre, et en même tems à celle que Mr. *Newton* vous a écrite; et que j'ai envoyé le tout à M. *Remond* à Paris, qui ne manquera pas de vous le faire tenir. Je me suis servi de cette voye, pour avoir des témoins neutres et intelligents de notre dispute : et Mr. *Remond* en fera encore part à d'autres. Je lui ai envoyé en même tems une copie de votre Lettre, et de celle de Mr. *Newton*. Après cela vous pourrez juger, si la mauvaise chicane de quelques-uns de vos nouveaux amis m'embarrasse beaucoup.

[1] Les extraits des lettres de Newton ont pour objet de fixer chronologiquement les diverses phases de la controverse. La substance de ces lettres se retrouve tout entiere dans l'*Ad lectorem*, page 5, et dans le *Recensio*, page 9. [F. L.]

Extrait d'une lettre de M. Leibnitz *à Mme la Comtesse* de Kilmansegg. 18 *Avril* 1716.
Recueil précité, page 34.

Étant venu en France l'an 1672. jeune garçon, comme il est aisé de croire, j'apportai de nos Universitez de toutes autres connoissances, que celles de la profonde Géométrie. Le Droit et l'Histoire étoient mon fait. Je me plaisois pourtant à la Mathématique pratique, et je m'étois un peu exercé aux propriétez des Nombres, ayant publié un petit livre sur l'Art des Combinaisons dès l'an 1666, et je fis même une remarque considérable sur les différences des suites (ou *series*) des Nombres, où d'autres n'avoient pas assez pris garde. A Paris je me fourrois dans les grandes Bibliothéques; et je cherchois des Pièces rares, sur-tout en Histoire; mais je ne laissois pas de donner encore quelque tems aux curiositez de Mathématique. Je fis un tour à Londres, et m'y trouvant au commencement de l'année 1673, quoique je n'y fisse point un long séjour, je ne laissai pas de faire connoissance avec Mr. *Oldenbourg*, Secrétaire de la Société des Sciences, que le Roi *Charles II.* avoit érigée : et comme j'aimois un peu la Chymie, je pratiquai aussi Mr. *Boyle*, chez qui je rencontrai un jour un Mathématicien, nommé Mr. *Pell*; et lui ayant conté une certaine observation, que j'avais faite sur les Nombres, il m'apprit qu'un Holsteinois, qui se trouvoit à Londres, nommé Mr. *Mercator*, l'avoit faite aussi dans un livre publié depuis peu sur la figure qui s'appelle Hyperbole. Je cherchai ce livre, et je l'apportai avec moi en France.

Comme j'y pratiquai Mr. *Huygens* de Zulichem, inventeur du Système de Saturne et des Pendules, et grand Géomètre, je commençai à prendre goût aux méditations Géométriques. J'y avançai en peu de tems, et trouvai une suite de Nombres (ou *séries*) qui faisoit pour le Cercle ce que celle de *Mercator* avoit fait pour l'Hyperbole. La découverte fit du bruit à Paris. Mr. *Huygens* la fit valoir; et cela joint à d'autres raisons, fit qu'on me destina une place dans l'Académie Royale des Sciences. Nous crumes que j'étois le premier, qui avoit fait quelque chose de tel sur le Cercle; et j'en écrivis sur ce ton-là à Mr. *Oldenbourg* en 1674. avec qui auparavant je ne m'étois point entretenu de telles choses, quoique nous eussions déjà échangé plusieurs Lettres. Mr. *Oldenbourg* m'écrivit qu'un Mr. *Newton* à Cambridge avoit déjà donné des choses semblables, non-seulement sur le Cercle, mais encore sur toutes sortes d'autres figures, et m'en envoya des essais. Cependant le mien fut assez applaudi par Mr. *Newton* même. Il s'est trouvé dans la suite, qu'un nommé Mr. *Gregory* avoit trouvé justement la même *series* que moi. Mais c'est ce que j'appris tard.

Mais ce n'est pas de quoi il s'agit : car j'allai plus avant, et joignant mes anciennes observations sur les différences des Nombres à mes nouvelles méditations de Géométrie, je trouvai environ en 1676. (autant qu'il m'en peut souvenir) un nouveau Calcul, que j'appellai *le Calcul des Différences*, dont l'application à la Géo-

métrie produisoit des merveilles. Mais devant retourner en Allemagne, où feu Monseigneur le Duc *Jean Frederic*, Oncle de notre Roi, m'avait appellé la même année, et voulant profiter du peu de séjour qui me restoit à Paris, on peut bien juger que je n'eus point le tems de demeurer long-tems dans mon cabinet, et de méditer beaucoup, pour faire valoir d'abord ma nouvelle découverte. Je passai par l'Angleterre et par la Hollande. Étant à Londres, mais très peu de jours, je fis connoissance avec Mr. *Collins*, qui me montra plusieurs Lettres de Mr. *Newton*, de Mr. *Gregory* et d'autres, qui rouloient principalement sur les *séries*. Étant arrivé à Hanover je reçus de Mr. *Oldenbourg* en 1677. une Lettre que Mr. *Newton* lui avoit écrite pour m'être communiquée, où il disoit pouvoir mener les Tangentes d'une figure donnée sans ôter les irrationelles, et aussi réciproquement, qu'il avoit deux Méthodes pour trouver la figure propre aux Tangentes d'une nature donnée, et il cacha l'une et l'autre sous des lettres transposées. Je répondis à Mr. *Oldenbourg*, par une Lettre donnée à Hanover le 21. de Juin 1677, et je lui envoyai ma méthode, que je jugeois fournir tout ce que Mr. *Newton* promettoit des siennes en énigme.

Les choses en demeurèrent là, et j'eus quelque loisir de pousser mes méditations tant sur ces matières que sur d'autres. Quelques années après, des Amis à *Leipsic*, de concert avec moi, commencèrent un Journal des Savans en Latin, qui se devoit donner tous les mois, et qui a toujours été continué depuis. Je m'engageai d'y fournir quelque chose de tems en tems. Cela commença en 1682. Je publiai alors ma *séries* pour le Cercle dont j'ai parlé ci-dessus. En 1684, je publiai le nouveau Calcul des différences, que j'avois inventé et gardé presque neuf ans sans me presser de le publier. Cette invention, dont on reconnut l'usage par l'application à des questions difficiles, fit du bruit. Le Marquis *de l'Hospital*, Vice-Président de l'Académie des Sciences à Paris, fit un livre exprès là-dessus. On s'en servit en France, en Italie, et même en Angleterre. Mais personne ne s'y signala davantage que Messieurs *Bernoulli* en Suisse.

En 1687. M. *Newton* publia son Livre intitulé : *Principes Mathématiques de la Nature.* Il dit en Latin pages 253. 254. ce qui donne ce sens en François : *Dans le Commerce de Lettres que j'ai eu il y a dix ans (par l'entremise de Mr.* Oldenbourg) *avec Mr.* Leibnitz, *très habile Géomètre, lorsque je lui fis savoir que j'avois une méthode de déterminer les quantités les plus grandes ou les plus petites, de mener des Tangentes, et d'effectuer d'autres choses semblables en termes sourds aussi bien qu'en termes rationaux; que je cachai sous des lettres transposées, qui renfermoient ce sens :* « une équa- « tion donnée, qui contient des quantitez fluentes, trouver les Fluxions, et réci- « proquement : » *ce célèbre personnage me répondit, qu'il étoit tombé sur une Méthode, qui faisoit aussi cet effet, et la communiqua; qui ne différoit guère de la mienne, que dans les termes, et dans les caractères.* Ainsi, M. *Newton* ne me contesta point d'avoir trouvé la chose de mon chef. J'eus aussi l'honnêteté de dire publiquement, et de faire dire à mes Amis, que je croyois que Mr. *Newton* avoit eu de son chef quelque chose de semblable à mon invention.

Mais en 1711. que j'étois depuis environ 27. ans en possession de l'invention, il y eut des gens en Angleterre, qui poussez, ce me semble, par des mouvemens d'envie, s'avisèrent de me la contester. On prit pour prétexte certaines paroles du Journal de Leipsic de l'an 1705. qu'on expliquoit malignement, comme si elles disoient que Mr. *Newton* l'avoit prise de moi, quoiqu'il n'y ait pas un mot qui le dise. Là-dessus on m'accusa, par une espèce de retorsion prétendue, d'avoir plutôt appris la chose de Mr. *Newton*. On porta la Société Royale de Londres à donner commission à certaines personnes d'examiner les vieux papiers sans m'en donner aucune part, et sans savoir si je ne récuserois point quelques Commissaires, comme partiaux. Et sous prétexte du rapport de cette Commission, on publia un livre contre moi en 1711. sous le titre de *Commerce Épistolique*, où l'on inséra des vieux papiers, et des anciennes lettres, mais en partie tronquées; et on supprima celles qui pouvoient faire contre Mr. *Newton*. Et ce qui est le pis, on y ajouta des remarques pleines de faussetez malignes, pour donner un mauvais sens à ce qui n'en avoit point. Mais la Société Royale n'a point voulu prononcer là-dessus, comme j'ai appris par un extrait de ses Registres : et plusieurs personnes de mérite en Angleterre (même des Membres de la Société Royale) n'ont point voulu prendre aucune part à ce qui s'est fait contre moi.

On me manda la nouvelle de la publication de ce livre, avant que le livre me fut rendu; et ayant su qu'on en avoit envoyé un exemplaire au célèbre Mr. *Jean Bernoulli*, qui connoissoit à fond l'invention dont il s'agissoit, et l'avoit fait valoir mieux que personne par de belles découvertes, et qui étoit tout-à-fait impartial, je le priai de m'en dire son sentiment. Il me répondit par une lettre datée de Bâle le 7. de Juin 1713. dont voici l'extrait traduit en François.

Suit la traduction du Judicium Mathematici *imprimé ci-dessus page* 185.

On publia cette lettre; et je crus avec raison pouvoir opposer ce jugement à celui de tous ceux qui pourroient approuver la manière dont on en avoit usé contre moi dans la publication du livre intitulé *Commerce Epistolique*. Etc.

Extrait d'une lettre de M. Leibnitz *à M. l'abbé* Conti [1], *en date du* 9 *Avril* 1716, *pour répondre à la lettre de M. le chevalier* Newton, *en date du* 26 *Février* 1716. *Recueil précité, page* 53.

C'est sans doute pour l'amour de la vérité que vous vous êtes chargé d'une espèce de cartel de la part de Mr. *Newton*. Je n'ai point voulu entrer en lice avec des enfans perdus qu'il avoit détachez contre moi, soit qu'on entende celui qui a fait l'Accusateur sur le fondement du *Commercium Epistolicum*, soit qu'on regarde la préface

[1] Cette lettre est celle que Leibnitz annonce à l'abbé Conti par le billet du 14 avril 1716, rapporté ci-dessus, *page* 240. [F. L.]

pleine d'aigreur qu'un autre a mise devant la nouvelle édition de ses *Principes*; mais puisqu'il veut bien paroître lui-même, je serai bien aise de lui donner satisfaction.

Je fus surpris au commencement de cette dispute d'apprendre qu'on m'accusoit d'être l'Aggresseur; car je ne me souvenois pas d'avoir parlé de Mr. *Newton* que d'une manière fort obligeante. Mais je vis depuis qu'on abusoit pour cela d'un passage des Actes de Leipsic du mois de Janvier 1705, où il y a ces mots : *Pro differentiis Leibnitianis, D.* Newtonus *adhibet, semperque adhibuit Fluxiones*; où l'Auteur des Remarques sur le *Commercium Epistolicum* dit, *pag.* 108 : *Sensus verborum est, quod* Newtonus *Fluxiones differentiis Leibnitianis substituit.* Mais c'est une interprétation maligne d'un homme qui cherchoit noise. Il semble que l'Auteur des paroles inserées dans les Actes de Leipsic a voulu y obvier tout exprès par ces mots, *adhibet SEMPERQUE adhibuit*, pour insinuer, que ce n'est pas après la vûe de mes Différences, mais déjà auparavant, qu'il s'est servi de Fluxions. Et je défie qui que ce soit de donner un autre but raisonnable à ces paroles *semperque adhibuit;* au lieu qu'on se sert du mot *substituit*, en parlant de ce que le Père *Fabri* a fait après *Cavallieri*. D'où il faut conclure, ou que Mr. *Newton* s'est laissé tromper par un homme qui a empoisonné ces paroles des Actes, qu'on supposoit n'avoir pas été publiées sans ma connoissance, et s'est imaginé qu'on l'accusoit d'être plagiaire; ou bien qu'il a été bien aise de trouver un prétexte de s'attribuer ou faire attribuer privativement l'invention du nouveau Calcul, (depuis qu'il en remarquoit le succès et le bruit qu'il faisoit dans le monde) contre ses connoissances contraires, avouées dans son livre des Principes, *pag.* 253. de la première édition. Si l'on avoit fait connoitre qu'on trouvoit quelque difficulté, ou sujet de plainte dans les paroles des Actes de Leipsic, je suis assuré que ces Messieurs, qui ont part à ces Actes, auroient donné un plein contentement; mais il semble qu'on cherchoit un prétexte de rupture.

Je n'ai pas eu connoissance du *Commité nombreux de personnes distinguées de plusieurs Nations, assemblé exprès par ordre de la Société Royale.* Car on ne m'en a donné aucune part; et je ne sai pas encore présentement les noms de tous ces Commissaires, et particulièrement de ceux qui ne sont pas des Isles Britanniques. Je ne crois pas qu'ils approuvent tout ce qui a été mis dans l'ouvrage publié contre moi. Etc....

Mr. *Newton* veut que j'avoue, et que j'accorde ce que j'ai avoué ou accordé il y a 15. ans, ou autrement que l'on en pourra conclure que je suis de mauvaise foi : on devroit en attendre autant de lui; car il y a maintenant deux fois quinze ans, que dans la première édition de ses Principes, *pag.* 253. 254. il m'accorde l'invention du calcul des différences, indépendamment de la sienne; et depuis il s'est avisé, je ne sai comment, de faire soutenir le contraire. Etc....

N'entendant pas bien ce que Mr. *Newton* allègue des *Actes de Leipsic* du mois de Mai 1700. j'y ai regardé; et je trouve qu'il n'en a pas bien pris le sens. Il n'y est point parlé de l'invention du nouveau Calcul des différences, mais d'un artifice

particulier des *Maximis et Minimis*, qui en est indépendant; et dont je m'étois avisé bien du tems avant que Mr. *Bernoulli* eût proposé son Problême de la plus courte descente, mais dont je jugeois que Mr. *Newton* se devoit être avisé aussi, lorsqu'il avoit donné la figure de son Vaisseau dans ses Principes. Ainsi j'ai voulu dire, qu'il a fait connoître publiquement avant moi, qu'il possédoit cet artifice : ce que je ne pouvois pas dire du calcul des différences et des Fluxions, puisque j'en avois fait voir l'utilité publiquement avant la publication de ce livre. Cet Artifice particulier des *Maximis et Minimis* n'est point nécessaire, quand il s'agit simplement d'une grandeur; car alors la méthode de Mr. *Fermat* perfectionnée par les nouveaux calculs suffit; mais quand il s'agit de toute une figure qui doit faire le mieux un effet demandé, il faut autre chose.

Mr. *Newton* hazarde ici une accusation, mais qui va tomber sur lui-même. Il prétend que ce que j'ai écrit pour lui à Mr. *Oldenbourg* en 1677. est un déguisement de la méthode de Mr. *Barrow*. Mais comme Mr. *Newton* avoue dans la *pag.* 253, et 254. de la première édition de ses Principes, *me ipsi* (tunc) *Methodum communicasse à Methodo ipsius vix abludentem præterquàm in verborum et notarum formulis*; il s'ensuivra que sa méthode n'est aussi qu'un déguisement de celle de Mr. *Barrow*.

Je crois que lui et moi nous serons aisément quittes de cette accusation : car une infinité de gens liront le livre de Mr. *Barrow*, sans y trouver notre Calcul. Etc.

Cependant si quelqu'un a profité de Mr. *Barrow*, ce sera plutôt Mr. *Newton* qui a étudié sous lui, que moi, qui, autant que je puis m'en souvenir, n'ai vu les livres de Mr. *Barrow* qu'à mon second voyage d'Angleterre, etc....

On peut bien juger que lorsque j'ai parlé en 1676. des Problêmes qui ne dépendoient ni des Equations, ni des Quadratures, j'ai voulu parler des Équations qu'on connoissoit alors dans le monde: c'est-à-dire, des Équations de l'Analyse ordinaire. Et on le peut juger de ce que j'ajoute les Quadratures comme quelque chose de plus que ces Équations. Mais les Équations différentielles vont au delà même des Quadratures; et l'on voit bien que j'entendois même parler des Problêmes qui vont à ces sortes d'Équations inconnues alors au public. Cette objection se trouvoit déjà dans les remarques au *Commercium;* mais je n'avois point cru que Mr. *Newton* étoit capable de l'employer.

Je juge par un endroit de ma lettre du 27. d'Août 1676. (*pag.* 65. du *Commercium Epistolicum*) que je devois déjà avoir alors l'ouverture du calcul des différences; car j'y dis avoir résolu d'abord par une certaine Analyse (*certa Analysi solvi*) le Problême de Mr. *de Beaune* proposé à Mr. *Descartes*. Cette Analyse n'étoit que cela. On le peut résoudre sans cela; et je crois que Monsieur *Huygens* et Monsieur *Barrow* l'auroient donné au besoin, comme beaucoup d'autres choses; mais selon ma manière de noter, ce n'est qu'un jeu. Je trouve une petite faute dans cette page : il y a *ludus naturæ* au lieu de *hujus naturæ;* mais cette faute étoit ancienne, et se devoit déjà trouver dans la copie de ma lettre envoyée à Mr. *Newton;* car il y répond (dans la lettre du 24. d'Octobre 1676. *pag.* 86. *du Commercium :*) *Hos casus*

vix numeraverim inter ludos naturæ. Je n'avois point entendu ce qu'il vouloit dire, mais à présent je vois l'origine de la méprise. Etc.

Mr. *Newton* dit que je l'ai accusé d'être plagiaire. Mais où est-ce que je l'ai fait? Ce sont ses adhérens qui ont paru intenter cette accusation contre moi, et il y a connivé. Je ne sais pas s'il adopte entièrement ce qu'ils ont publié; mais je conviens avec lui, que la malice de celui qui intente une telle accusation sans la prouver, le rend coupable de calomnie. Etc....

Vous avez donné, Monsieur, la solution d'un Problême, que les partisans de Monsieur *Newton* n'avoient point trouvée jusqu'ici; car vous avez trouvé le moyen de me faire répondre en m'envoyant une lettre de Mr. *Newton* lui-même. Après cela vous n'avez pas besoin de me faire des exhortations là-dessus. Si la question avoit été seulement, lequel de nous deux, de Mr. *Newton* ou de moi, a trouvé le premier le calcul en question, je ne m'en mettrois point en peine. Aussi est-il difficile de décider ce que l'un et l'autre peut avoir gardé *in petto*, et combien longtems. Etc.

Extrait des Remarques [1] *de M. le chevalier* Newton *sur la lettre de M.* Leibnitz *à M. l'abbé* Conti. — $\frac{18}{29}$ *Mai* 1716. — *Recueil précité, page* 82.

Monsieur *Leibnitz*, dans sa lettre du 29. Décembre 1711. a justifié le passage des Actes de Leipsic du mois de Janvier 1805. pag. 34. et 35. et par-là il se l'est approprié; à présent il tâche vainement de l'adoucir, prétendant que les mots, *adhibet semperque adhibuit*, sont interprétés malignement par le mot *substituit*. Mais dans l'interprétation qu'il voudroit y donner, il supprime la force des termes *igitur* et *quemadmodum :* dont le premier fait que les mots *semperque adhibuit*, sont une conséquence de ce qui précède, et dont le dernier les rend équivalens à *substituit*; cette omission étant rétablie, le sens qu'il tâche de donner présentement à ces paroles ne sauroit subsister. Etc.

Mr. *Leibnitz* se plaint que le Committé s'est écarté du but, en se jettant sur l'examen des Suites infinies; mais il devoit considérer que les deux méthodes dont je me sers, sont deux branches d'une méthode générale d'Analyse. Je les ai jointes ensemble dans mon Traité de l'Analyse, envoyé par le Docteur *Barrow* à Mr. *Collins* en 1669;

---

[1] Newton, mécontent de ce que Leibnitz était allé chercher à Paris des *temoins neutres et intelligents*, se borna à réfuter la lettre du 9 avril par des *Remarques* qu'il communiqua seulement à quelques amis. Aussitôt après la mort de Leibnitz, arrivée le 14 novembre 1716, Newton fit imprimer à Londres ces *Remarques*, en les faisant précéder de l'avertissement que voici : « Cum « D. *Leibnitius* adduci non posset, ut vel *Commercio Epistolico* responderet, vel probaret quæ « pro lubitu affirmabat, cumque præcedentes Epistolas in Galliam prius mitteret quam earum « tertia in Angliam veniret, et prætenderet se hoc facere, ut testes haberet, et alias etiam adhiberet « contumelias; *Newtonus* minime rescripsit, sed observationes sequentes in Epistolam illam tertiam « scriptas, cum amicis solummodo communicavit. » [F. L.]

je les ai entremêlées dans le Traité que j'écrivis en 1671. comme j'en ai averti dans mes lettres du 10. Décembre 1672. et du 24. Octobre 1676. Dans ma lettre du 13. Juin 1676, j'ai dit que ma méthode des Suites s'étendoit presque à tous les Problèmes, mais qu'elle ne devenoit pas générale sans l'aide d'autres méthodes; entendant par là, comme je m'en explique dans la lettre suivante, la méthode des Fluxions et la méthode des Suites arbitraires. A présent de vouloir me ravir ces deux autres méthodes, c'est me restraindre à la méthode des Suites, et me réduire à une méthode qui n'est pas générale. Etc.

Il prétend que dans mon livre des *Principes* pag. 253. et 254. je lui ai passé qu'il tenoit indépendamment de moi l'invention du Calcul différentiel; et que de m'en attribuer présentement l'invention à moi-même, c'est révoquer la concession que je lui ai faite. Mais dans le Paragraphe qu'il cite, je ne trouve pas un seul mot qui le favorise. Tout au contraire, j'y représente que j'avois donné avis de ma méthode à Mr. *Leibniz,* avant qu'il m'eût donné avis de la sienne; et je le mets dans l'obligation de prouver qu'il eût trouvé la méthode avant la date de ma lettre, c'est-à-dire, huit mois pour le moins avant la date de la sienne. De plus, en renvoyant, comme je fais, aux lettres que nous nous étions écrites Mr. *Leibniz* et moi, dix ans auparavant, j'ai laissé aux Lecteurs à consulter ces lettres, qui peuvent servir à expliquer le Paragraphe en question. Etc.

Dans l'année 1684. Mr. *Leibniz* publia seulement les Élémens du Calcul différentiel, qu'il appliqua à quelques questions sur les Tangentes, et à quelques autres qui regardent la Méthode *de Maximis et Minimis*, comme *Fermat* et *Gregory* avoient fait avant lui; et fit voir comment on pouvoit procéder dans ces sortes de questions sans ôter les Quantitez irrationnelles; mais il ne passa pas aux Problêmes de la plus haute Géométrie. Le livre des *Principes Mathématiques* contient les premiers exemples qui ayent été publiés, de l'application de ce Calcul aux Problêmes les plus relevez; et c'est dans ce sens que j'ai entendu ce que Mr. *Leibniz* avoit dit dans les Actes de Leipsic du mois de Mai 1700. pag. 206. Mais Mr. *Leibniz* fait remarquer, que ce qu'il avoit dit alors devoit s'entendre d'un Artifice particulier *de Maximis et Minimis,* dont il convient que j'étois instruit lorsque je donnai, dans mes *Principes,* la figure du Vaisseau, ou du Solide de la moindre résistance. Mais puisque cet Artifice suppose la Méthode différentielle comme connue, et qu'il s'étend encore au delà : que d'ailleurs c'est à cet Artifice que Mr. *Leibniz* et ses disciples doivent la solution des Problêmes dont il fait le plus de cas; enfin, puisque Mr. *Leibniz* appelle cet Artifice une Méthode de la plus haute conséquence et de la plus grande étendue, je me contente de l'aveu qu'il fait, que j'ai été le premier qui dans un ouvrage donné au public, ai prouvé que cet Artifice m'étoit connu. Etc.

M. *Oldenbourg* en juin 1676 envoya à M. *Leibniz* des copies de ces deux lettres [de *Gregory,* 5 sept. 1670, de *Newton,* 10 décemb. 1672], parmi les extraits des lettres de M. *Gregory;* et M. *Leibniz*, dans sa lettre du 21 juin 1677, n'envoya

rien [1] en échange qui n'eût déjà été fait auparavant, et dont il n'eût reçu avis par ces lettres. La Méthode différentielle pour les Tangentes, qu'il envoya pour lors, n'étant que la Méthode même de *Barrow*, qu'il avoit déguisée sous une notation nouvelle, et qu'il avoit étendue aux méthodes des Tangentes de *Gregory* et de *Slusius*, aux équations enveloppant des quantitez irrationnelles, et au cas le plus simple de mes quadratures. Etc.

A l'égard du *Scholium* qui est mis à la suite du second Lemme du second livre de mes *Principes Mathématiques*, et qu'on a tant cité mal à propos contre moi, il n'a pas été écrit dans le dessein de faire honneur de ce Lemme à M. *Leibniz*, mais bien de m'en assurer la possession [2]. Que M. *Leibniz* l'ait inventé après moi, ou l'ait eu de moi, c'est une question qui n'est de nulle conséquence, puisque les seconds inventeurs n'ont proprement aucun droit à l'invention.

Extrait d'une lettre de Rémond de Montmort *à* Brook Taylor, *sous la date du* 22 *Janv.* 1717. (*Sir* D. Brewster, *life of Sir* Isaac Newton, *tome II, page* 511 [3].)

Pour moi je soutiens icy et je l'ai toujours soutenu hautement que M. Newton a été maître du calcul différentiel et intégral avant tout autre géomètre, et que dès l'année 1677 il sçavoit tout ce que les travaux de M. Leibnitz et M. Bernoulli ont découvert depuis [4].

Extrait d'une lettre de Rémond de Montmort *à* Brook Taylor, *sous la date du* 18 *Décemb.* 1718. (*Ouvrage cité ci-dessus, même page.*)

Je crois que quand vous avez donné au public votre excellent livre *Methodus Incrementorum*, vous étiez peu instruit de l'histoire des nouvelles découvertes. Etc.

---

[1] On a le droit de croire, au contraire, que les nouveautés contenues dans cette mémorable lettre furent la principale cause du silence de Newton. La mort d'Oldenbourg, mise en avant dans le n° LXXI du *Com. Epist.*, est évidemment un prétexte. Le nouveau secrétaire de la Société Royale aurait naturellement servi d'intermédiaire entre les deux membres de cette compagnie, s'ils n'avaient préféré correspondre directement, comme ils le firent en 1693. [F. L.]

[2] Newton n'était probablement pas bien convaincu de la valeur de son argumentation; car, dans la troisième édition des *Principes*, il a changé la rédaction du *Scholie* et supprimé le nom de Leibnitz. Mais les droits de Leibnitz, comme les souvenirs de Cassius et de Brutus aux funérailles de Junie, « præfulgebant..... eo ipso quod effigies eorum non visebantur. » [F. L.]

[3] Je ne me crois pas obligé de suivre, dans mes citations, l'orthographe de l'ouvrage de sir D. Brewster. Quand on voit écrit, par exemple, tome II, page 429, ligne 20, *cognitam* pour *cognutam*; même tome, page 435, ligne 16, *très-semble* pour *très-humble*, etc., etc.: on peut craindre que les épreuves n'aient pas été revues par une personne assez familière avec les langues latine et française. [F. L.]

[4] C'est une opinion que la publication posthume de la Méthode des Fluxions est loin de justifier. [F. L.]

Je pense comme vous, Monsieur, sur le mérite de M. Newton. Je parle toujours de lui comme d'un homme au-dessus des autres, et qu'on ne peut trop admirer. Mais je ne puis m'empêcher de combattre l'opinion où vous estes que le public a reçu de M. Newton, et non de MM. Leibuitz et Bernoulli, les nouveaux calculs, et l'art de les faire servir à toutes les recherches qu'on peut faire en Géométrie. C'est une erreur de fait. Etc... Il est insoutenable de dire que MM. Leibnitz et Bernoulli ne sont pas les vrays et presque uniques promoteurs de ces calculs. Voici mon raisonnement, jugez-en. Ce sont eux, et eux seuls, qui nous ont appris les règles de différentier et d'intégrer, la manière de trouver par ces calculs les Tangentes des courbes, leurs points d'inflexion et de rebroussement, leurs plus grandes et leurs plus petites ordonnées, les développées des caustiques par réflexion et par réfraction, les quadratures des courbes, les centres de gravité, ceux d'oscillation et de percussion, les problèmes de la méthode inverse des tangentes...... Ce sont eux qui les premiers ont exprimé des courbes méchaniques par les équations différentielles, [nous ont enseigné] à en abaisser les dimensions, et à les construire par les logarithmes, ou par des rectifications de courbes quand cela est possible; et qui enfin par de belles et nombreuses applications de ces calculs aux problèmes les plus difficiles de la Méchanique, tels que sont ceux de la chaînette, de la voile, de l'élastique, de la plus vite descente, de la paracentrique, nous ont mis et nos neveux dans la voye des plus profondes découvertes. Ce sont là des faits sans réplique. Il suffit pour s'en couvaincre d'ouvrir les jouruaux de Leipsic. Vous y verrez les preuves de ce que j'avance.

Personne, hors M. le M. de l'Hospital, qu'on peut joindre en partie à ces Messieurs [puisqu'il a] été disciple de M. Jean Bernoulli, n'a paru avec eux sur la scène jusqu'en 1700 ou environ. Je ne compte pour rien ce que M. Carré en France et M. Moivre en Angleterre, de même que M. Craige, donuèrent dans ce temps ou peu auparavant; tout cela n'étoit rien en comparaison de ce qu'on nous avoit donné dans les Actes de Leipsic. Il est vrai, Monsieur, que les *Principes Math.* de M. Newton ont paru en 1686 [1687]; ce sçavant ouvrage peut donner lieu de croire que M. Newton sçavoit dèslors de ces calculs tout ce qu'on sçait aujourd'huy, M. Bernoulli même. Je ne veux pas en disconvenir, et c'est une question à part. Mais il est sûr au moins que ce livre n'apprend rien de ces calculs, si ce n'est le lemme 2[e], page 250, 1[re] éd[on], mais vous sçavez qu'il ne contient que la 1[re] et la plus simple règle de prendre les différences, ce que M. Leibnitz avoit fait avec plus d'étendue en 1684. Je dois adjouter que, dans le 2[e] volume de M. Wallis imprimé en 1693, on trouve plus au long les règles de ces calculs, mais quoique ce morceau soit très propre à nous donner une grande idée de ce qu'en sçavoit alors M. Newton, il n'en apprend pas plus que l'on en trouvoit dans les journaux de Leipsick. On trouve en 1697 une solution de M. Newton du problème de la plus viste descente, mais comme il n'y a point d'analyse, et qu'on ne sçait point la route qu'il a suivie, cela ne touche point à ma proposition qui est que depuis 1684, première date publique

32

de la naissance du calcul différentiel et intégral, jusqu'en 1700 ou environ, où je suppose qu'il avoit acquis presque toute la perfection qu'il a aujourd'huy, personne n'a contribué à le perfectionner que MM. Leibnitz et Bernoulli, à moins qu'on n'y veuille joindre pour quelque part M. le M. de l'Hospital à qui ils avoient de bonne heure révélé leurs secrets, qui apparemment en seroient encore pour tous les Géomètres d'aujourd'huy, s'ils avoient voulu les tenir cachés à l'imitation de M. Newton, qui à mon avis a dû avoir la clef de ceux là ou des pareils dès le temps qu'il a donné son fameux ouvrage *Ph. Nat. Prin. Math.*

On ne peut rien de plus beau ni de meilleur en son genre que le traité de M. Newton *De Quadratura Curvarum*, mais il est venu bien tard. La date de l'impression de cet ouvrage est fâcheuse, non pour M. Newton, qui a acquis tant de gloire que l'homme le plus ambitieux n'en pourroit désirer davantage, mais pour quelques Anglois qui semblent porter envie à ceux qui ont découvert et publié les premiers ces nouvelles méthodes qui ont porté si loin la Géométrie [1].

Ex Epistola Joh. Bernoulli *ad* Newtonum, *anno* 1719, 5 Julii *data. Vide* Life of sir Is. Newton, *Tome II, pag.* 503 *et seq.*

Fallunt haud dubiè, qui me tibi detulerunt tanquam auctorem quarundam ex schedis istis volantibus, in quibus forsan non satis honorifica tui fit mentio. Sed obsecro te, vir inclyte, atque per omnia humanitatis sacra obtestor, ut tibi certo persuadeas, quicquid hoc modo sine nomine in lucem prodierit, id mihi falso imputari. Non enim mihi est in more positum, talia protrudere anonyma quæ pro meis agnoscere nec vellem nec auderem. Etc...

Quàle fuerit illud scriptum jam non inquiro, interim certum te volo, à me non esse profectum, si præsertim tibi, quem tanti facio, non usquequaque esset decorum; absit autem ut credam *Leibnitium*, virum sane optimum, me nominando fucum vobis facere voluisse; credibile namque potius est ipsum vel sua vel aliorum conjectura fuisse deceptum; qua in re etsi data opera me offendere noluerit, non tamen omni culpa vacabat, quod tam temere et imprudenter aliquid perscripserit, cujus nullam habebat notitiam; fecisset utique melius, si antea ex me ipso quid de re esset rescivisset. Etc...

---

[1] Cette lettre est incontestablement une des plus remarquables qui aient été écrites sur la controverse. Rémond de Montmort, né en 1678, mort en 1719, fut élu en 1716 membre libre de l'Académie des Sciences de Paris. [F. L.]

Ex Epistola Joh. Bernoulli *ad* Newtonum, *anno* 1719, 21 Decemb. *data. Ibid. pag.* 505 *et seq.*

Sunt mihi epistolæ virorum quorundam doctorum ex nationibus nullam in hac lite nationali partem habentibus, quas si publici juris facerem, nescio an illi ex Vestratibus, qui tanto cum fervore ad injurias usque mecum expostulant, magnam inde gloriandi causam acquirerent. Habeo inter alia documenta authentica apographum à *D. Montmortio* nuper defuncto mathematico, ut nosti, dum viveret perdocto atque nulli parti addito, utpote Gallo; habeo, inquam, apographum ab eo mihi transmissum alicujus epistolæ [1], quam ipse ad cl. *Taylorum* [2] scripserat 18 decemb. 1718, et quæ vel sola magnam litis partem dirimeret, sed non ex voto *Taylori* cæterorumque ejus sequacium. Ab istis autem evulgandis libenter abstinebo, modo vestri desinant, quod pacis causa optarem, nostram lacessere patientiam. Etc...

Ex Epistola Newtoni *ad* Varignonum [3], *anno* 1721, 26 Sept. S. V. *data. Ibid. pag.* 500 *et seq.*

D. *Moivreus* [4] mihi dixit D. *Bernoullium* picturam meam optare : sed ille nondum agnovit publice me methodum fluxionum et momentorum habuisse anno 1672, uti conceditur in Elogio D. *Leibnitii* in historia Academiæ vestræ edito. Ille nondum agnovit me in Propositione prima libri de Quadraturis, anno 1693 à Wallisio edita, et anno 1686 in Lem. 2. Lib. 2. *Princ.* synthetice demonstrata, Regulam veram differendi differentialia dedisse, et Regulam illam anno 1672 habuisse, per quam utique curvaturas curvarum tunc determinabam. Ille nondum agnovit me anno 1669, quando scripsi Analysin per series, methodum habuisse quadrandi curvilineas accurate, si fieri possit, quemadmodum in Epistola mea 24 Octob. 1676, ad *Oldenburgum* data, et in Propositione quinta Libri de quadraturis, exponitur; et Tabulas curvilinearum quæ cum Conicis Sectionibus comparari possunt per ea tempora à me compositas fuisse. Si ea concesserit, quæ lites prorsus amovebunt, picturam meam haud facile negabo.

[1] Il s'agit de la lettre rapportée ci-dessus, page 248. [F. L.]

[2] Taylor, né en 1685, mort en 1731.

[3] Varignon, né en 1654, mort en 1722.

[4] De Moivre, né en 1668, mort en 1754.

PIÈCES JUSTIFICATIVES ET DOCUMENTS.

SECONDE PARTIE.

SOMMAIRE DES PRINCIPAUX TRAVAUX MATHÉMATIQUES QUI, AU XVII° SIÈCLE, ONT PRÉPARÉ L'INVENTION DE L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

On s'étonnera peut-être de ne rencontrer, dans cette sorte de généalogie, ni Wallis, l'auteur du traité *De Arithmetica infinitorum*, publié en 1655, ni Huyghens, qui avait déjà mis au jour, avant cette époque, les *Theoremata de circuli et hyperbolæ quadratura*, et les *De circuli magnitudine inventa nova*. L'influence de Wallis sur les premiers travaux de Newton est manifeste, et Leibnitz lui-même s'est plu à proclamer combien les conseils et les encouragements de Huyghens avaient été utiles à sa jeunesse. Cependant Wallis et Huyghens ne me paraissent avoir aucun droit direct de paternité sur les nouveaux calculs, qu'ils ont tous deux méconnus, le premier plus encore peut-être que le second. Voir ci-dessus, page 215. [F. L.]

PIÈCES JUSTIFICATIVES ET DOCUMENTS.

SECONDE PARTIE.

SOMMAIRE DES PRINCIPAUX TRAVAUX MATHÉMATIQUES QUI, AU XVII[e] SIÈCLE, ONT PRÉPARÉ L'INVENTION DE L'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

CAVALIERI,

Né en 1598, mort en 1647.

Geometria indivisibilibus [1]. . . . . . *Excerpta è Præfatione.*

. . . . Cum ergo solidorum, quæ ex revolutione circa axim oriuntur, genesim aliquando meditarer, rationemque gignentium planarum figurarum cum genitis solidis compararem, maximè sanè admirabar quod à propriorum parentum conditione adeò natæ figuræ degenerarent, ut aliam omninò ab eisdem rationem sequi viderentur. Cylindrus enim, exempli gratia, in eadem basi et circa eundem axim cum cono constitutus, est ejusdem triplus, cum tamen ex parallelogrammo trianguli dictum conum generantis duplo per revolutionem oriatur. . . . . . . Cum ergo talem veritatem in plurimis aliis figuris sæpius ac sæpe fuissem meditatus, ubi prius, ex. gr., cylindrum ex indefinitis numero parallelogrammis, conum vero in eadem basi, et circa eundem axim cum cylindro constitutum, ex indefinitis numero

[1] *Geometria indivisibilibus continuorum novâ quadam ratione promota. Authore* P. Bonaventura Cavalerio *Mediolanen. Ordinis S. Hieron. Olim in Almo Bonomen. Archigym. Prim. Mathematicarum Profess. in hac postrema editione ab erroribus expurgata. Ad illustriss.* Martinum Ursinum *Pennæ Marchionem,* etc. *Bononiæ,* 1653. *Ex typographia de Ducis,* in-4°.

La première édition est de 1635 : je cite la seconde que j'ai seule sous les yeux.

Cavalieri a été disciple de Galilée : sur la production du traité manuscrit des indivisibles, il fut nommé, en 1629, à la chaire devenue vacante à l'Université de Bologne par la mort de l'astronome Magin. [F. L.]

triangulis per axem transeuntibus veluti compactum effingens, habita dictorum planorum mutua ratione, illicò et ipsorum solidorum ab ipsis genitorum emergere rationem existimabam, cum jam planè constaret planorum rationi genitorum ab iisdem solidorum rationem minimè concordare, figurarum mensurarum tali ratione inquirentem oleum et operam perdere, ac ex inanibus paleis trituram facturum esse, mihi jure censendum videbatur. Verum paulò post profundius rem contemplatus in hanc tandem deveni sententiam, nempè ad rem nostram lineas et plana, non ad invicem coincidentia, sed æquidistantia assumenda esse; sic enim in plurimis ratione investigata reperii tum corporum proportioni ipsorum planorum, tum planorum proportioni ipsorum linearum proportionem (si eo modo sumantur, quo lib. 2. explicatur) ad amussim in omnibus respondere. Cylindrum igitur et conum jam dictos, non amplius per axem sed æquidistanter basi ceu sectos contemplatus, eandem sanè rationem habere illa comperii, quæ lib. 2. voco omnia plana cylindri ad omnia plana coni, regula communi basi (nempè circulorum congeriem, quæ intra cylindrum et conum, veluti vestigia plani à basi ad oppositam basim continuò illi æquidistanter FLUENTIS[1] quodammodo relinqui intelliguntur[2]) ei, quam habet cylindrus ad conum. Optimam ergo methodum figurarum scrutandæ mensuræ judicavi prius linearum pro planis, et planorum pro solidis rationes indagare, ut illicò ipsarum figurarum mensuram mihi compararem, res, puto, juxta vota successit, ut perlegenti patebit. Artificio autem tali usus sum, quale ad

[1] Designavit is [Newtonus] Ideam deducendi Aream ex Ordinata, considerando Aream tanquam Quantitatem nascentem et augescentem sive crescentem per FLUXIONEM continuam............. Momentum Lineæ punctum vocavit, ex mente *Cavallerii;* quamvis non sit punctum Geometricum, sed Lineola infinite brevis : Momentum autem Areæ vel superficiei vocavit Lineam, secundum eundem *Cavallerium;* licet non sit linea Geometrica, sed superficies Latitudine infinite exili. — *Recensio libri, pag.* 13. [F. L.]

[2] Pascal, qui a fait usage de la méthode de Cavalieri dans la solution des problèmes sur la *Roulette*, la justifie de la manière suivante :

« J'ai voulu faire cet avertissement, pour montrer que tout ce qui est démontré par les véritables règles des indivisibles, se démontrera aussi à la rigueur et à la manière des anciens; et « qu'ainsi l'une de ces méthodes ne diffère de l'autre qu'en la manière de parler : ce qui ne peut « blesser les personnes raisonnables, quand on les a une fois averties de ce qu'on entend par là. « Et c'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté dans la suite d'user de ce langage des indivisibles, « *la somme des lignes*, ou *la somme des plans*; et ainsi quand je considérerai, par exemple, le « diamètre d'un demi-cercle divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points Z, d'où « soient menées les ordonnées ZM, je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression, *la somme* « *des ordonnées*, qui semble ne pas être intelligible à ceux qui n'entendent pas la doctrine des « indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un « nombre indéfini de lignes; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend autre chose par là si non la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque « ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement « un plan, qui ne diffère de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune « donnée.

« Ce n'est pas que ces mêmes lignes ZM ne puissent être multipliées par d'autres portions égales

propositas quæstiones absolvendas Algebratici adhibere solent; qui quidem numerorum radices, quamvis ineffabiles, surdas, ac ignotas, nihilominus simul aggregantes, subtrahentes, multiplicantes, ac dividentes, dummodo propositæ rei exoptatam sibi notitiam enucleare valeant, sua satis obiisse munera sibi persuadent; non aliter ipse ergo indivisibilium sive linearum, sive planorum congerie (iisdem ut in lib. 2. explicatur assumptis) licet quoad eorundem numerum innominabili, surda, ac ignota, quoad magnitudinem tamen conspicuis limitibus clausa, ad continuorum investigandam mensuram usus sum. . . . .

Excerpta è Geometriæ lib. I.

Definitio E.

Regula appellabitur in planis recta linea, cui quædam lineæ ducuntur æquidistantes, et in solidis planum, cui quædam plana ducuntur æquidistantia. . .

Postulata.

1. Quamlibet rectam lineam indefinitè ita posse moveri, ut semper uni cuidam fixæ sit parallela, sive in eodem, sive in pluribus planis, in tali motu existat.

2. Quodlibet planum indefinitè ita posse moveri, ut semper uni cuidam fixo sit æquidistans.

Excerpta è Geometriæ lib. II.

Postulata.

1. Congruentium planarum figurarum omnes lineæ, sumptæ una earundem ut regula communi, sunt congruentes; et congruentium solidorum omnia plana, sumpta eorum uno, ut regula communi, sunt pariter congruentia.

2. Omnes figuræ similes alicujus figuræ planæ sunt omnia plana solidi, quod terminatur superficie, in qua jacent perimetri omnium dictarum similium figurarum.

Theorema III. Propos. III.

Figuræ planæ habent inter se eandem rationem, quam eorum omnes lineæ juxta quamvis regulam assumptæ; et figuræ solidæ, quam eorum omnia plana juxta quamvis regulam assumpta.

« d'une autre ligne quelconque, qui soit, par exemple, double de ce diamètre; et alors la somme « de ces lignes ZM formera un espace double du demi-cercle, savoir une demi-ellipse : et ainsi la « somme des mêmes lignes ZM formera un espace plus ou moins grand, selon la grandeur de la « ligne droite, par les portions égales de laquelle on entend qu'elles soient multipliées, c'est-à-dire « selon la distance qu'elles garderont entre elles. » — *Lettre de M. Dettonville à M. de Carcavi*, 10 *décembre* 1658.

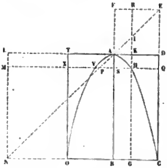
Œuvres de Pascal. La Haye, 1779. *vol. V*, *pag.* 246. [F. L.]

Corollarium.

Liquet ex hoc, quod, ut inveniamus quam rationem habeant inter se duæ figuræ planæ vel solidæ, sufficiet nobis reperire quam, in figuris planis, inter se rationem habeant earundem omnes lineæ, et, in figuris solidis, earundem omnia plana juxta quamvis regulam assumpta, quod novæ hujus meæ Geometriæ veluti maximum jacio fundamentum.

Excerpta è Geometricis Exercitationibus [1]. — *Exerc. Pri.* — *Pag.* 81.

Sit quæcunque Parabola OAC, cujus vertex A, basis OC, et diameter AB, ita ut sit semi-parabola ABC. Compleantur parallelogramma ABCD, ABOT; dico parallelogrammum TOCD esse ipsius parabolæ OAC sesquialterum.



Producatur BA in F ità ut AF = AD, et compleatur parallelogrammum FADE; ducatur in eo diameter AE, et agatur, regula CE, GR secans BC in G, curvam in H, AD in K, AE in I, et FE in R; sitque per H ducta QS ipsi BC æquidistans. Per prop. 20 primi Conicorum libri $\frac{\overline{CB}^2}{\overline{HS}^2} = \frac{BA}{AS}$. Cum vero BC = AD = AF = RK, SH = AK = KI, BA = GK, AS = KH; ideo $\frac{\overline{RK}^2}{\overline{KI}^2} = \frac{GK}{KH}$. Hoc est ut omnia quadrata parallelogrammi FD ad omnia quadrata trianguli ADE, regula CE, ita erunt omnes lineæ parallelogrammi BD ad omnes lineas trilinei ADC, regula eadem CE. Sed omnia quadrata FD omnium quadratorum trianguli ABC ostensa sunt tripla esse in prop. 24, ergo parallelogrammum BD triplum erit ipsius trilinei ADC, et subindè sesquialterum semi-parabolæ ABC; unde parallelogrammum TC sesquialterum erit parabolæ OAC, sunt enim hæc prædictorum dupla. Quod, etc.

---

[1] *Exercitationes Geometricæ sex.* I. *De priori methodo indivisibilium.* II. *De posteriori methodo indivisibilium.* III. *In* Paulum Guldinum *è Societate Jesu dicta indivisibilia oppugnantem.* IV. *De usu eorundem Ind. in Potestatibus Cossicis.* V. *De usu dictorum Ind. in unif. diffor. gravibus.* VI. *De quibusdam Propositionibus miscellaneis, quarum synopsim versa pagina ostendit. Auctore* P. Bonaventura Cavalerio *Mediolanensi ordinis Jesuatorum S. Hieronymi Priore, et in Almo Bononiensi Archigymnasio primario Mathematicarum Professore. Ad illustrissimos et sapientiss. Senatus Bononiensis quinquaginta viros. — Bononiæ, Typis Jacobi Monti,* 1647.

Pour abréger les citations, j'ai dû m'attacher plus encore à l'esprit de Cavalieri qu'au texte.

[F. L.]

Producatur nunc DT in L ità ut $AL = AB$, et compleatur parallelogrammum ALNB, in quo agatur diameter AN. Dico omnia quadrata TC dupla esse omnium quadratorum OAC, regula NC.

Esto QS producta in M, quæ secet AN in P, curvam in V, TO in X, et LN in M. Erit rursus $\frac{\overline{CB}^2}{\overline{HS}^2} = \frac{BA}{AS}$, hoc est $\frac{\overline{QS}^2}{\overline{HS}^2} = \frac{MS}{SP}$. Nempè ut omnia quadrata parallelogrammi DB ad omnia quadrata semi-parabolæ ABC, ità erunt omnes lineæ parallelogrammi LB ad omnes lineas trianguli ANB. Sed parallelogrammum Trianguli est duplum, ergo omnia quadrata parallelogrammi DB dupla sunt omnium quadratorum semi-parabolæ OAC; undè et eorum quadrupla. . . . . Quod, etc.

Consideramus solida rotunda, ad invicem similaria, genita ex parallelogrammo TC et ex parabola OAC juxtà regulam figuram à basi OC descriptam. Sit ergò figura à basi OC descripta circulus, ejusque diameter OC quem rectè secet planum TC; innotescit ex TC fieri cylindrum, illumque rectum si AB sit perpendicularis circulo ipsius, vel scalenum si sit illi inclinata. Similiter ex parabola fiet conoides parabolicum circà axem AB, rectum vel inclinatum circulo OC prout se habebit. Omnia autem plana cylindri et conoidis sunt circuli, et circulorum superficies quadratis radiis sunt proportionales. Igitur omnia plana cylindri omnium planorum conoidis sunt dupla. Hinc ergò fit manifestum cylindrum ex TC genitum, conoidis parabolici geniti ex parabola OAC, juxtà regulam circulum OC, duplum esse, sive AB sit ipsi circulo OC perpendicularis, sive non.

DESCARTES,

Né le 31 mars 1596, mort le 11 février 1650.

—

Quod ad inveniendum omnes linearum curvarum proprietates, sufficiat scire relationem quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum: et modum ducendi lineas rectas, quæ ipsas secent in omnibus illis punctis ad angulos rectos.

—

Excerpta è Geometriæ lib. II [1].

. . . .

. . . Atque ideo confidam, me exposuisse hic omnia illa, quæ pro curvarum linearum elementis requiruntur, postquam generalem modum ducendi rectas lineas, quæ eas ad rectos angulos in quibusvis ipsarum punctis secent, ostendero. Nec

[1] *Geometria à* Renato Descartes *anno* 1637 *Gallicè edita; postea* [1649] *autem una cum Notis* Florimondi de Beaune *in curia Blesensi Consiliarii Regis, Gallicè conscriptis in latinam linguam versa, et Commentariis illustrata, opera atque studio* Francisci à Schooten, *in Acad.*

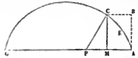
verebor dicere, Problema hoc, non modò eorum, quæ scio, utilissimum et generalissimum esse; sed etiam eorum, quæ in geometria scire unquam desideraverim.

—

Methodus generalis inveniendi lineas rectas, quæ secent datas curvas, vel earum contingentes, ad angulos rectos.

—

Sit CE linea curva, oporteatque per punctum C rectam lineam ducere, facientem cum ipsa angulos rectos.



Suppono rem tanquam jam factam, lineamque quæsitam esse CP, quam produco usque ad punctum P, ut occurrat rectæ GA, quam suppono illam esse, ad cujus puncta referenda sunt puncta omnia lineæ CE: ità ut faciendo MA seu $CB = y$, et CM seu $BA = x$, habeam æquationem aliquam, quæ mihi relationem, quæ est inter x et y, explicet. Deinde facio $PC = s$, et $PA = v$, seu $PM = v - y$. Unde propter triangulum rectangu-

---

Lugd. Batava Matheseos Professoris. Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad uberiorem explicationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus exornata, quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet. Amstelædami, apud Ludovicum *et* Danielem Elzevirios, 1659, in-4°.— pag. 39 et seq.

La géométrie de Descartes ayant été écrite en français, et publiée pour la première fois sur l'original, à Leyde, en 1637, je crois nécessaire de justifier le parti que j'ai pris de citer la version latine de Schooten. Il m'a été inspiré par la lecture d'une lettre de Descartes au P. Mersenne, en date du 25 décembre 1639; elle se termine ainsi :

« Je n'ai point dessein ni occasion de faire imprimer les notes que M. de Beaune a pris la peine « de faire sur ma géométrie; mais s'il les veut faire imprimer lui-même, il a tout pouvoir; seule- « ment aimerois-je mieux qu'elles fussent en latin, et ma géométrie aussi, en laquelle j'ai dessein « de changer quasi tout le second livre, en y mettant l'analyse des lieux, et y éclaircissant la façon « de trouver les tangentes, ou plutôt (à cause que je me dégoûte tous les jours de plus en plus de « faire imprimer aucune chose) s'il lui plaît d'ajouter cela en ses notes, je m'offre de lui aider en « tout ce qui sera de mon pouvoir. »

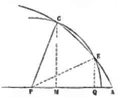
Cet appel a été principalement entendu par Schooten, jeune professeur de Mathématiques à Leyde, qui a élevé un véritable monument en l'honneur de Descartes, par l'édition dont j'ai rappelé ci-dessus le titre. La version latine de Schooten a été revue par Descartes et par de Beaune, ainsi qu'il ressort de la correspondance de ces géomètres et de la préface de l'euvrage : « *Versio- « nem quod attinet, cum fidelissimus ubique verborum interpres, salvo rerum pondere, esse stu- « duerim, vix est, quod censuram aliquorum metuam; præsertim ubi illam ab Auctore, cui pro jure « integrum fuit suum ubique sensum vel interpretari, vel clariorem reddere, postea recognitam « fuisse sciverint*.. *additæ « etiam sunt Notæ à* ... D. Florimondo de Beaune ..... *Quæ eodem modo in latinam linguam « à me translatæ, postquam huic Geometriæ primo ejus permissu essent annexæ, dein ab ipso « recognitæ et emendatæ*, ... » [F. L.]

lum PMC .... invenio $x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2\,vy - y^2}$, aut $y = v - \sqrt{s^2 - x^2}$. Cujus æquationis ope aufero ex æquatione altera, (quæ mihi relationem explicat, quam puncta curvæ CE habent ad puncta rectæ GA) alterutram è duabus quantitatibus indeterminatis x vel y.

Suivent des exemples.

Postquam igitur invenimus talem æquationem, non eà utemur ad cognoscendas quantitates x, y, vel z, quæ hic datæ sunt, quia punctum C est datum, sed ad inveniendam quantitatem v vel s, quæ quæsitum punctum P determinant. In quem finem considerari debet : si punctum P tale est, quale desideratur, quòd circulus, cujus id ipsum est centrum, quique per punctum C transit, tangat ibidem curvam lineam CE, nec ipsam secet. Sed quòd, si idem punctum P propiùs aut remotiùs sumatur à puncto A quàm oportet, circulus hic non solùm in puncto C, sed etiam necessariò in alio quodam puncto curvam CE sit secturus.

Deinde considerandum quoque est, quòd, quando hic circulus lineam curvam CE secat, æquatio, per quam quantitas x vel y, vel quædam alia similis quæritur, supponendo PA et PC esse cognitas, necessariò duas contineat radices, quæ sunt inæquales. Nam si, exempli gratiâ, circulus hic secet curvam CE, in punctis C et E, ac ducatur EQ parallela ipsi CM : nomina quantitatum indeterminatarum x et y æquè bene convenient lineis EQ et QA, atque ipsis CM et MA, existente PE æquali PC, propter circulum. Adeò ut, quærendo lineas EQ et QA, per PE et PA, (quæ tanquam cognitæ supponuntur) eandem habituri simus æquationem, quam si quærerentur CM et MA per PC et PA. Unde liquidò constat, ipsius x, vel y, vel alterius ejusmodi quantitatis, quam supposuerimus, valorem, in hac æquatione fore duplicem, hoc est, æquationem duas admissuram radices, quæ sunt inæquales; quarum quidem una futura est CM, et altera EQ, si fuerit x, quam quærimus; aut quarum una futura est MA, et altera QA, si fuerit y, quæ quæritur. Verum quidem est, quòd, cùm punctum E non ad eandem curvæ partem reperitur cum puncto C, una tantùm duarum harum radicum sit vera, et altera inversa seu minor quàm nihil : sed quò hæc puncta C et E sibi invicem sunt propiora, eò quoque differentia inter radices hasce erit minor, quæ denique omnino inter se æquales futuræ sunt, si bina hæc puncta in unum punctum cadant; hoc est, si circulus, qui per C transit, curvam CE ibidem tangat, nec omnino secet.



Præterea considerandum est, quòd æquatio, in qua duæ sunt radices æquales, necessariò eandem formam habeat, ac si in se ipsam multiplicetur quantitas, quam velut incognitam supponimus, multata quantitate cognitâ sibi æquali : et deinde hæc ultima summa, si non tot dimensiones habet, quot præcedens, rursus per aliam summam multiplicetur, totidem, quot alteri desunt, dimensiones habentem,

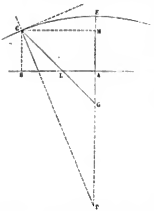
sic ut separatim æquatio inter singulos unius atque singulos alterius terminos haberi possit.

Dans les exemples qui suivent, Descartes cherche les racines égales par la méthode des coefficients indéterminés, dont il est l'inventeur. Puis il ajoute :

Si enim demonstrandis Theorematis omnibus, quorum hic mentionem aliquam facio, immorarer, conscribendus mihi esset liber multò major, quàm quidem mihi esset animus. Attamen obiter vos monere volo, quòd inventio hæc supponendi duas ejusdem formæ æquationes, ad comparandum separatim omnes terminos unius cum omnibus terminis alterius, ut inde ex una sola nascantur plures aliæ, (cujus hic exempla vidistis,) infinitis aliis Problematis inservire possit, neque una ex minimis methodi, quâ utor, existat.

Excerpta è Fr. à Schooten *commentario in librum II.*

Esto CE prima Conchoïdes veterum, cujus Polus G, norma verò vel regula, cujus ope ducta est, sit AB; ita ut rectæ omnes quæ tendunt versùs G, atque intrà curvam CE et rectam AB continentur, sint æquales. Oporteat autem rectam lineam ducere (ut CP), quæ Conchoïdem hanc ad angulos rectos secet in dato puncto C.



Esto ergo GA $= b$, AE $=$ LC $= c$, CM $=$ AB $= x$, MA $=$ CB $= y$, AP $= v$, et PC $= s$: erit $x^2 = s^2 - v^2 - 2vy - y^2$.

Eodem modo AL $= x - \sqrt{c^2 - y^2}$.

Jam verò, propter similia triangula GMC et GAL,

$\frac{\text{GM}}{\text{CM}} = \frac{\text{GA}}{\text{AL}}$, hoc est $\frac{b+y}{x} = \frac{b}{x - \sqrt{c^2 - y^2}}$, vel $xy = \sqrt{b^2c^2 + 2bc^2y + (c^2 - b^2)y^2 - 2by^3 - y^4}$.

Deindè ut evanescat signum radicale, ducatur utraque pars in se quadratè, atque ad tollendum x^2 substituatur ejus loco $s^2 - v^2 - 2vy - y^2$; utrinque auferatur y^4, fiat transpositio, ac demum dividatur per $2(v - b)$, orietur æquatio talis :

$$y^3 + \frac{c^2 + v^2 - b^2 - s^2}{2(v-b)}\,y^2 + \frac{bc^2}{v-b}\,y + \frac{b^2c^2}{2(v-b)} = 0.$$

Quæ æquatio relationem ostendit, quam puncta Conchoïdis CE habent ad puncta lineæ rectæ BA. Quare, postquam in ipsa quantitas y est data, quando quidem punctum C datum est, superest ut inveniamus quantitates v et f, determinantes punctum quæsitum P. Hunc in finem aliam æquationem instituo, quæ æquè multas

habeat dimensiones, et in qua y duas valeat quantitates, quæ sibi invicem sint æquales. Ideòque supponendo $y = e$, sive $y - e = 0$: duco $y - e$ in se, et fit $y^2 - 2ey + e^2 = 0$: æquatio duas habens radices æquales. Hanc porrò multiplico per $y + f$, ut ascendat ad aliam trium dimensionum, et provenit æquatio

$$y^3 + (f - 2e)y^2 + (e^2 - 2ef)y + e^2 f = 0.$$

Cujus terminos separatim confero cum terminis præcedentis :

$$\frac{b^2c^2}{2(v-b)} = e^2 f, \quad \frac{bc^2}{v-b} = e^2 - 2ef, \quad \frac{c^2+v^2-b^2-s^2}{2(v-b)} = f - 2e.$$

Ex primà oritur $f = \frac{b^2c^2}{2e^2(v-b)}$; in secundà, in locum f subrogetur valor ejus inventus, adhibitàque decenti transpositione, invenietur $v = b + \frac{bc^2}{e^2} + \frac{b^2c^2}{e^3}$. Sive, substituendo y in locum quantitatis suppositæ e, $v = b + \frac{bc^2}{y^2} + \frac{b^2c^2}{y^3}$.

Eodem modo si reliquus terminus cum reliquo comparetur, invenietur quantitas incognita s.

FERMAT,

Né en 1590, mort en 1665.

Methodus ad disquirendam maximam et minimam [1].

Omnis de inventione maximæ et minimæ doctrina, duabus positionibus ignotis innititur, et hac unicà præceptione : statuatur quilibet quæstionis terminus esse a, sive planum, sive solidum, aut longitudo, prout proposito satisfieri par est, et inventa maxima aut minima in terminis sub a, gradu utlibet involutis; ponatur rursus idem, qui prius esse terminus a, $a + e$, iterùmque inveniatur maxima aut minima in terminis sub a et e, gradibus ut libet coefficientibus. Adæquentur, ut loquitur Diophantus, duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia, et demptis communibus (quo peracto homogenea omnia ex parte alterutra ab e, vel ipsius

---

[1] *Varia opera Mathematica D.* Petri de Fermat *senatoris Tolosani... Tolosæ. Apud Joannem Pech* ..... 1679, in-f°. *pag.* 63 *et* 64.

Les travaux de Fermat sont au moins contemporains de ceux de Cavalieri et de Descartes, mais leur publication a été plus tardive. La méthode *de maximis et minimis* n'était guère connue que par la correspondance de l'auteur avec Roberval et le P. Mersenne, quand Hérigone la fit imprimer dans le tome VI de son *Cours de Mathématiques*, qui parut en 1644. — *Cursus Mathematicus, nova, brevi, et clara methodo demonstratus. Per Notas reales et universales, citra usum cujuscunque idiomatis, intellectu faciles........ par* Pierre Hérigone......... *Paris,* 1644, grand in-8°. *Tome VI, pages* 59-69. [F. L.]

gradibus, afficiuntur) applicentur omnia ad e, vel ad elationem ipsius graduum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis, affectione sub e omninò liberetur.

Elidantur deindè utrimque homogenea sub e, aut ipsius gradibus quomodolibet involuta, et reliqua æquentur. Aut, si ex unâ parte nihil superest, æquentur sanè, quod eodem recidit, negata adfirmatis. Resolutio ultimæ istius æqualitatis dabit valorem a, quâ cognitâ, maxima aut minima ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innotescet [1].

Exemplum subjicimus.



Sit recta AC, ità dividenda in E, ut rectangulum AE. EC sit maximum; recta AC dicatur b. Ponatur pars altera b esse a, ergò reliqua erit $b - a$, et rectang. sub segmentis erit $ba - a^2$, quod debet inveniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius b esse $a + e$, ergò reliqua erit $b - a - e$, et rectang. sub segmentis erit $ba - a^2 + be - 2\,ae - e^2$, quod debet adæquari superiori; $ba - a^2 = ba - a^2 + be - 2\,ae - e^2$ [2].

Demptis communibus, $be = 2\,ae + e^2$; et omnibus per e divisis, $b = 2\,a + e$; elidatur e, $b = 2\,a$.

Igitur b bifariam est dividenda ad solutionem propositi; nec potest generalior dari methodus.

De tangentibus linearum curvarum.

Ad superiorem methodum inventionem Tangentium ad data puncta in lineis quibuscunque curvis reducimus.

Sit data, verbi gratiâ, Parabole BDN, cujus vertex D, diameter BC, et punctum in eâ datum B, ad quod ducenda est recta BE tangens parabolen, et in puncto E cum diametro concurrens; ergò sumendo quodlibet punctum O in

---

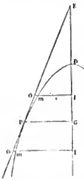
[1] Quoique les exemples donnés par Fermat élucident beaucoup sa méthode, l'exposé qu'il en fait est si obscur, qu'on me saura peut-être gré de rappeler ici la traduction libre, mais complète et précise, qui a été donnée par Lagrange.

« Dans sa méthode *de maximis et minimis*, il [Fermat] égale l'expression de la quantité, dont « on recherche le *maximum* ou le *minimum*, à l'expression de la même quantité dans laquelle « l'inconnue est augmentée d'une quantité indéterminée. Il fait disparaître dans cette équation les « radicaux et les fractions, s'il y en a, et après avoir effacé les termes communs dans les deux « membres, il divise tous les autres par la quantité indéterminée par laquelle ils se trouvent mul- « tipliés; ensuite il fait cette quantité nulle, et il a une équation qui sert à déterminer l'inconnue « de la question. »

Leçons sur le calcul des fonctions. Paris. Courcier, 1806. *Pag.* 321 *et* 322. [F. L.]

[2] Pour faciliter la lecture, nous traduisons partout, en langage algébrique moderne, les opérations exprimées en langage vulgaire dans le texte original. [F. L.]

recta BE, et ab eo ducendo ordinatam OI, à puncto autem B ordinatam BC,



$\frac{CD}{DI} > \frac{\overline{BC}^2}{\overline{OI}^2}$ [1], quia punctum O est extrà parabolen; sed propter similitudinem triangulorum $\frac{\overline{BC}^2}{\overline{OI}^2} = \frac{\overline{CE}^2}{\overline{IE}^2}$, igitur $\frac{CD}{DI} > \frac{\overline{CE}^2}{\overline{IE}^2}$.

Cum autem punctum B detur, datur applicata BC, ergò punctum C; datur etiam CD. Sit igitur $CD = d$ datæ. Ponatur $CE = a$, $CI = e$; ergo $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$.

Et ducendo inter se medias et extremas,

$$d(a^2+e^2-2ae) > a^2(d-e).$$

Adæquentur igitur juxtà superiorem methodum, demptis itaque communibus,

$$de^2 - 2aed = -a^2e;$$

Aut quod item est

$$de^2 + a^2e = 2aed.$$

Omnia dividantur per e, $de + a^2 = 2ad$.

Elidatùr de, ergò $a^2 = 2ad$, ideoque $a = 2d$.

Ergò CE probavimus duplam ipsius CD, quod quidem ità se habet.

Nec unquam fallit methodus, imò ad plerasque quæstiones pulcherrimas potest extendi, ejus enim beneficio centra gravitatis in figuris lineis curvis et rectis comprehensis, et in solidis invenimus, et multa alia, de quibus fortasse aliàs, si otium suppetat. De quadraturis spatiorum sub lineis curvis et rectis contentorum, imò et de proportione solidorum ab eis ortorum ad conos ejusdem basis et altitudinis, fusè cum Domino de Roberval egimus [2].

. . . .

[1] Descartes n'ayant pas compris à la lecture de cet exemple comment Fermat ramene, dans tous les cas, la détermination des tangentes à celles d'un maximum ou d'un minimum, il ne sera peut-être pas inutile de faire remarquer que, pour les portions de courbes concaves vers l'axe des abscisses, on a en général $\frac{BC}{CE} = \frac{OI}{IE} > \frac{mI}{IE}$, et, pour les portions de courbes convexes vers l'axe des abscisses, on a en général $\frac{BC}{CE} = \frac{OI}{IE} < \frac{mI}{IE}$.

Ainsi le rapport de l'ordonnée d'un point à la sous-tangente de ce point est constamment un maximum ou un minimum, relativement au rapport des ordonnées des points voisins à leurs abscisses comptées à partir du pied de la tangente considérée. [F. L.]

[2] Extrait d'une lettre de Fermat à M. de Roberval, professeur aux Mathématiques à Paris. Du 22 septembre 1636.

« Sur le sujet de la méthode *de maximis et minimis*, vous sçavez que puisque vous avez veu

Ad eamdem methodum [1].

Doctrinam tangentium antecedit jamdudum tradita Methodus de inventione maximæ et minimæ, cujus beneficio terminantur quæstiones omnes dioristicæ, et famosa illa problemata quæ apud Pappum in Præf. lib. 7 difficiles determinationes [2] habere dicuntur, facillimè determinantur.

Lineæ curvæ, in quibus tangentes inquirimus, proprietates suas specificas vel per lineas rectas tantùm absolvunt, vel per curvas, rectis aut aliis curvis quomodolibet implicatas.

Priori casui jam satisfactum est præcepto, quod quia concisum nimis, difficile sanè, sed tamen sufficiens, tandem repertum est.

Consideramus nempè in plano cujuslibet curvæ rectas duas positione datas, quarum altera diameter, si libeat, altera applicata nuncupetur. Deindè jam inventam tangentem supponentes ad datum in curva punctum, proprietatem specificam curvæ, non in curva ampliùs, sed in invenienda tangente, per æqualitatem consideramus, et elisis, quæ monet doctrina de maxima et minima, homo-

---

« celle que M. *Despagnet* vous a donnée, vous avez veu la mienne que je lui baillay, il y a environ « sept ans étant à Bourdeaux..

« Si M. Despagnet ne vous a proposé ma méthode que comme je la lui baillay pour lors, vous « n'avez pas veu ses plus beaux usages. Car je la fais servir en diversifiant un peu, 1. Pour l'in- « vention des propositions pareilles à celles du conoïde que je vous envoyay par ma dernière. « 2. Pour l'invention des tangentes des lignes courbes, sur lequel sujet je vous propose ce pro- « blème, *ad datum punctum in conchoide Nicomedis invenire tangentem*. 3. Pour l'invention « des centres de gravité de toute sorte de figures aux figures mêmes différentes des ordinaires, « comme en mon conoïde et autres infinies, de quoi je fairay voir des exemples quand vous vou- « drez. 4. Aux problèmes numériques, auxquels il est question de parties aliquotes, et qui sont « tous très-difficiles..

« Tout ce que je viens de vous dire ne sont qu'exemples; car je vous puis assurer que sur « chacun des points précédents, j'ay trouvé un très-grand nombre de très-belles propositions. Je « vous envoyeray la démonstration de celles que vous voudrez.............................. »

Fermatii Opera, pag. 136-137.

Il résulte de cette lettre que *Fermat* était en possession de sa méthode dès l'année 1629. [F. L.]

[1] *Fermatii* Opera, pag. 69.

[2] « Datam infinitam rectam lineam uno puncto secare, ita ut interjectarum linearum ad data « ipsius puncta, vel unius quadratum, vel rectangulum duabus contentum datam proportionem « habeat, vel ad rectangulum contentum una ipsarum interjecta, et alia extra data, vel duabus « interjectis contentum punctis ad utrasque partes datis. Hujus [propositionis] igitur velut bis « disjunctæ, et difficiles determinationes habentis demonstratio per plura fiat necesse est. » — *Fed. Commandini....... commentaria in libros octo Mathematicarum collectionum Pappi Alexandrini e greco....... in latinum......... conversos. — Pisauri*, 1602, in-folio.

Excerpta e Præf. lib. 7, pag. 159. [F. L.]

geneis fit demum æqualitas, quæ punctum concursus tangentis cum diametro determinat, ideoque ipsam Tangentem [1].

Suivent des exemples.

Quia tamen sæpius curvatura mutatur, ut in conchoide Nicomedæa, quæ pertinet ad priorem casum, et in omnibus speciebus curvæ D. *de Roberval*, primâ exceptâ quæ pertinet ad secundum, ut perfectè curva possit delineari, investiganda sunt ex arte puncta inflexionum, in quibus curvatura ex convexâ fit concava, vel contrà. Cui negotio eleganter inservit doctrina de maximis et minimis.

Suit un lemme général.

Ex prædicta methodo de maximis et minimis derivantur artificio singulari inventiones centrorum gravitatis, ut aliàs indicavi.

HUDDE,

Né en 16.., mort en 1704.

Excerpta ex Epistolis J. Huddenii *ad* F. à Schooten [2].

Ex Epistolâ 11, *pag.* 507 *et* 509.

Theorema. — Si in æquatione duæ radices sint æquales, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem quam libuerit; nimirùm, primus terminus æquationis per primum terminum Progressionis, secundus terminus æquationis per

---

[1] Lagrange, dans l'ouvrage déjà cité, expose la méthode générale des tangentes avec l'admirable clarté qui distingue ses écrits :

« Dans l'équation entre l'abscisse et l'ordonnée, que *Fermat* appelle la propriété spécifique de la « courbe, il augmente ou diminue l'abscisse d'une quantité indéterminée, et il regarde la nouvelle « ordonnée comme appartenant à la fois à la courbe et à la tangente, ce qui fournit une équation « qu'il traite comme celle de la méthode *de maximis et minimis*.

« Ainsi x étant l'abscisse et y l'ordonnée, si t est la soutangente au point de la courbe qui répond « à x et y, il est facile de voir que les triangles semblables donnent $\frac{y(t+e)}{t}$ pour l'ordonnée à la « tangente, relativement à l'abscisse $x+e$; et cette ordonnée doit être égalée à celle de la courbe « pour la même abscisse $x+e$. On aura donc l'équation dont il s'agit, en mettant dans l'équation « de la courbe $x+e$ à la place de x, et $y+\frac{ye}{t}$ à la place de y. Cette équation, après les réduc- « tions, sera divisible par e, et on supprimera ensuite comme nuls tous ceux où l'indéterminée e « se trouvera, parce qu'on doit supposer cette indéterminée nulle. L'équation restante donnera la « valeur de t en x et y. » *Calcul des fonctions*, *pag.* 323.

[2] Johannis Huddenii *Epistolæ duæ, quarum altera de Æquationum reductione, altera de Maximis et Minimis agit.*

Ces deux lettres sont les fragments d'un traité plus étendu, composé dans les années 1655 et

secundum terminum Progressionis, et sic deinceps : dico Productum fore æquationem, in quâ una dictarum radicum reperietur.

Suit la démonstration.

Hinc emanat :

Si in æquatione aliqua 3 sint radices æquales, et ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit, eo modo quo jam dictum est, remanebunt in Producto duæ adhuc æquales radices istarum trium; ac proinde productum hoc denuo per Arithmeticam Progressionem multiplicari poterit. Quòd si autem in Proposita æquatione quatuor radices æquales fuerint, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, relinquentur in hoc Producto adhuc 3 æquales radices istarum 4, et sic porrò, quoteunque æquales radices æquatio habuerit, semper per singulas ejusmodi multiplicationes una tantùm istarum æqualium radicum tolletur.

Ex Epistolâ 1, *pag.* 429, 433 *et seq.*

Decima Regula se extendit ad omnem æquationem, sive in ea Irrationales quantitates et fractiones, sive nullæ reperiantur, exceptis tantum illis æquationibus, in quibus signa radicalia sunt, quæ incognitam quantitatem includunt.

X. Regula,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, sive literalem, sive numeralem, cujus incognita quantitas (vel alia litera, quæ tanquam incognita considerari potest) duos vel plures æquales habet valores.

Primò si in Proposita æquatione duæ æquales radices existant, multiplico eam per Arithmeticam Progressionem pro libitu assumptam : nimirum, primum terminum æquationis per primum terminum Progressionis, secundum terminum æquationis per secundum terminum Progressionis, et sic deinceps; et Productum, quod inde fit, erit = 0. Deinde, cum sic duas habeam æquationes, quæro...... maximum earum

---

1656, et qui n'a jamais vu le jour. Elles ont été écrites en hollandais, traduites en latin par *Schooten*, et publiées à la suite du commentaire sur la Géométrie de *Descartes*, dans l'édition de 1659 dont j'ai reproduit le titre, pag. 259. La première lettre est datée du 14 juillet 1657, et la seconde du 27 janvier 1658.

Les travaux de *Hudde*, qui semblent n'avoir pour objet que des recherches d'analyse pure, se rattachent aux méthodes données par Descartes et par Fermat pour l'invention des tangentes. *Hudde* simplifie les procédés des inventeurs, tant pour la détermination des racines égales que pour celle des *maxima* et *minima*. *Huyghens*, au dire de *Schooten* qui fut son professeur, a eu l'ingénieuse idée de rapprocher les deux méthodes, en considérant la partie de la normale interceptée entre la courbe et l'axe des abscisses, comme la plus courte des droites qui, d'un point pris sur l'axe, puisse être menée à la courbe. [F. L.]

communem divisorem; atque hujus ope æquationem Propositam toties divido, quoties id fieri potest.

Suivent des exemples.

2°. Si in Proposita æquatione 3 æquales radices fuerint, multiplico illam per Arithmeticam Progressionem, ut antea; eritque Productum = o : hoc Productum rursus multiplico per Arithmeticam Progressionem; eritque hoc secundum Productum etiam = o. Si æquatio Proposita 4 radices æquales habeat, ter multiplico; si 5, quater; et ita semper obtinebuntur tot æquationes, quot radices æquales in æquatione Proposita continentur.

Suit un exemple.

Quod verò usum hujus Methodi concernit, is tantus est, in inveniendis tangentibus, determinandis Maximis, et quibusvis extremis, ut, quamvis se ad alia non extenderet, immensus tamen dici posset. Etenim reductis talibus Problematis ad Æquationem, in qua hæc sola conditio ad ejus determinationem adhuc requiritur, ut incognita quantitas (aut alia quævis litera, quæ ut incognita consideratur) ad duas æquales radices determinetur : poterit Quæsitum beneficio hujus Methodi quàm facillimè inveniri. Quippè nihil aliud opus est, quàm æquationem dicto modo per Arithmeticam Progressionem multiplicare : cum duæ hæ æquationes tunc omnes Problematis conditiones sint comprehensuræ, ità ut ipsæ tantùm resolvendæ restent. Et notandum est, hoc sæpe beneficio solius productæ æquationis, nullo, aut exiguo admodum labore, præstari posse :....................

Sit æquatio prædicta[1] $y^3 + \frac{c^2 + v^2 - b^2 - s^2}{2(v-b)} y^2 + \frac{bc^2}{v-b} y + \frac{b^2c^2}{2(v-b)} = 0$

multiplico per $+1, \quad 0, \quad -1, \quad -2$

fit $y^3 \quad - \frac{bc^2}{v-b} y - \frac{b^2c^2}{v-b} = 0$

seu $y^3 (v-b) = bc^2 y + b^2c^2$

et $v = b + \frac{bc^2}{y^2} + \frac{b^2c^2}{y^3}$ *priùs inventa.*

At verò sæpe etiam accidit, ut Quæsitum ex sola hac Producta æquatione inveniri nequeat; quemadmodum contingit si valorem quantitatis incognitæ s investigare velimus. Quippe tunc valor ipsius v in prima æquatione in ejus locum subrogandus est, vel potiùs in alia æquatione, per aliam Progressionem Productâ, cujus beneficio ex illa prima terminus aliquis pro lubitu (excepto eo, qui per primam Progressionem est sublatus) tolli potest.

Exempli gratiâ, in *superiori* exemplo multiplicatum fuit per + 1, o, — 1, — 2,

[1] Pour faciliter le rapprochement des méthodes, je substitue, aux équations rapportées par l'auteur, l'équation déjà établie ci-dessus, pag. 262, et qui sert à déterminer la normale en un point donné de la conchoïde des anciens. [F. L.]

ac indè inventum $v = b + \frac{bc^2}{y^2} + \frac{b^2c^2}{y^3}$; jàm si multiplicetur

$$y^3 + \frac{c^2 + v^2 - b^2 - s^2}{2(v-b)} y^2 + \frac{bc^2}{v-b} y + \frac{b^2c^2}{2(v-b)} = 0$$

per $\quad 0 \;, \qquad +1 \quad , \qquad +2 \;, \qquad +3 \;:$

Obtinetur $\quad \frac{c^2 + v^2 - b^2 - s^2}{2(v-b)} y^2 + \frac{2bc^2}{v-b} y + \frac{3b^2c^2}{2(v-b)} = 0$

multiplicando per $2(v-b)$, *transponendo* et dividendo per y^2

$$s^2 = c^2 + v^2 - b^2 + \frac{4bc^2}{y} + \frac{3b^2c^2}{y^2}.$$

Quo circa si in hac æquatione in locum v^2 subrogetur ejus valor, innotescet inde etiam quantitas s.

Quòd si verò contingat, æquationem, per quam v quæritur, esse talem, ut valor ipsius v per eandem æquationem solam sine ipsius s inclusione obtineri non possit : ..... potest tamen semper, quotcunque etiam dimensiones quælibet incognita quantitas habeat, tandem inveniri æquatio (operando haud secus ac si illarum communis divisor, ut supra ostensum fuit, quæreretur), in qua duntaxat una incognita quantitas includitur, cujus radices deinceps sunt inveniendæ.

Ex Epistolâ II. Pag. 509 *et seq.*

METHODUS DE MAXIMIS ET MINIMIS.

Positis quotcunque quantitatibus Algebraicis, maximum aut minimum designantibus, ponantur ipsæ $= z$; et ordinatâ æquatione multiplicetur ea per Progressionem Arithmeticam, eo modo, quo dictum est : et Productum erit æquatio, quæ communem cum præcedenti radicem habebit.

Ita ut ad hujus Methodi demonstrationem tantummodo probandum restet, æquationem illam primam duas æquales radices comprehendere. Quod equidem demonstratu adeo facile est, ut huic rei ulteriùs insistere nihil aliud sit, quàm operam et oleum perdere.

Et hæc quidem generalis mea Methodus est.

1. Cùm Algebraici termini, maximum aut minimum designantes, non nisi unam incognitam quantitatem continent, et nullas habent fractiones, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur, multiplico tantùm unumquemque terminum per numerum dimensionum incognitæ quantitatis [1], neglectis quantitatibus omnibus, in quibus incognita non reperitur, et suppono Productum $= 0$.

Ex. gr. sit $(3a - b)\, x^3 - \frac{2b^2a}{3c} x + a^2 b =$ alicui maximo

[1] On voit poindre ici la règle de la différentiation des puissances. [F. L.]

mult. per 3, 1,

fit $3\,(3a-b)\,x^2 - \frac{2b^2a}{3c}\,x = 0$ vel $3\,(3a-b)\,x^2 - \frac{2b^2a}{3c} = 0$.

2. Si Algebraici termini, maximum aut minimum designantes, unam tantùm incognitam quantitatem comprehendunt, atque aliquot fractiones admittunt, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur, operatio institui poterit, hoc pacto :

Primò, deleo omnes quantitates cognitas. Deinde si reliquæ quantitates non ejusdem denominationis fuerint, ipsas sub eundem denominatorem reduco. Quo peracto, considero hujus fractionis integrum Numeratorem cum unoquoque Membro seu parte separata Denominatoris (si ex diversis partibus constet) tanquam unam quantitatem, Maximum aut Minimum designantem, ac unum quodque membrum seu partem separatam Numeratoris multiplico per dimensionum numerum quantitatis incognitæ istius Membri, postquam ab eodem numero est ablatus dimensionum numerus incognitæ quantitatis, qui in hoc Membro Denominatoris reperitur; productoque per hoc membrum Denominatoris multiplicato, erunt omnia ejusmodi producta simul $= 0$.

Esto $\frac{(b+y)^2(c^2-y^2)}{y^2} + v^2 + 2vy + y^2 =$ alicui maximo [1].

Deletà quantitate cognità v^2, et reliquis sub communi divisore reductis, obtinebitur $\frac{2(v-b)y^3 + (c^2-b^2)\,y^2 + 2bc^2y + b^2c^2}{y^2}$

mult. num. per 1, 0, -1, -2.

mult. et divid. per y^2, divid. per 2, fit

$(v-b)\,y^3 - bc^2y - b^2c^2 = 0$. Undè oritur $v = b + \frac{bc^2}{y^2} + \frac{b^2c^2}{y^3}$ priùs inventa.

Esto $\frac{ba^2x + a^2x^2 - bx^3 - x^4}{ba^2 + x^3} - a + x =$ alicui maximo.

Deletà quantitate cognità a, et reliquis sub communi divisore reductis, habebitur $\frac{2ba^2x + a^2x^2 - bx^3}{ba^2 + x^3}$.

$$\left.\begin{array}{lll} & +1,\ +2,\ +3 & \\ \text{Porrò pro} & \dfrac{2ba^2x + a^2x^2 - bx^3}{ba^2}, & \text{scribo}\quad (2ba^2x + 2a^2x^2 - 3bx^3)\,ba^2 + \\ & -2,\ -1,\ 0 & \\ \text{pro} & \dfrac{2ba^2x + a^2x^2 - bx^3}{x^3}, & \text{scribo}\quad (-4ba^2x - a^2x^2)\,x^3 \end{array}\right\} = 0$$

divisis per a^2x; et mutatis signis, fit $x^4 + 4bx^3 + 3b^2x^2 - 2a^2bx - 2b^2a^2 = 0$.

3. Si termini Algebraici, Maximum aut Minimum designantes, plures unà

[1] Dans l'exemple que j'ai substitué à celui de *Hudde*, la quantité, qui doit être un minimum, représente le carré de la normale à la conchoïde des anciens, menée d'un point pris sur l'axe qui passe par le pôle et à une distance $v-b$ de ce pôle. [F. L.]

quantitate incognitâ includunt, suppono ipsos = z; et per hanc æquationem et per cæteras datas, seu quæ ex natura Problematis manant, ... reduco æquationes omnes ad unam, in qua necessariò duæ quantitates incognitæ continebuntur, et inter eas z. Cumque tunc sola z ad Maximi vel Minimi inventionem nota esse debeat, manifestum est in eum finem dantaxat concipiendum esse, alteram quantitatem incognitam duas æquales radices habere.

Extrait d'une lettre de feu M. Hudde *à* M. Van Schooten, *professeur en Mathématiques à Leyde. Du* 21 *de Novembre* 1659. *Traduit du hollandois. Journal litéraire de* La Haye, *Juillet et Août* 1713, *pag.* 460-464 [1].

Je me souviens que nous fûmes interrompus dans le temps que j'avois commencé de vous expliquer ma Méthode des Tangentes. Je vais vous décrire toute cette Méthode en peu de mots.

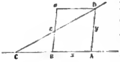
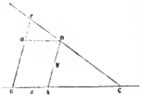


Fig. 1 et 2. Soit D un point dans la courbe, ABC une ligne menée à discrétion, B un point pris au hasard dans cette ligne, DA une ligne faisant un angle quel qu'il soit avec la ligne ABC. De plus, soit B*ca* parallèle à AD et D*a* parallèle à AB. Enfin, soit BA $= x$ et AD $= y$. Voici l'opération pour trouver la tangente CD.

Règle générale.

Rangez tous les termes de l'équation qui exprime la nature de la courbe, de manière qu'ils soient = o, et * ôtez de cette équation toutes les fractions qui ont x ou y dans leurs diviseurs. Multipliez le terme dans lequel y a le plus de dimensions par un nombre pris à discrétion, ou même par o, et multipliez le terme dans lequel y a une dimension de moins, par le même nombre diminué d'une unité; et continuez de même à l'égard des autres termes de l'équation.



De même multipliez par un nombre pris à volonté ou par o le terme où x a le plus de dimensions : le terme où x a une dimension de moins, doit être multiplié par le

---

[1] Les écrits de *Hudde* étant tres-rares, j'ai cru qu'on verrait ici avec intérêt un document qui complete les idées exposées par ce géomètre dans ses deux lettres à *Schooten*, en date des 14 juillet 1657 et 27 janvier 1658. [F. L.]

* Cette préparation n'est pas nécessaire. Il faut que M. *Hudde*, dans le temps qu'il a écrit cette lettre, n'ait pas connu l'avantage de sa méthode à cet égard. On voit par ses papiers qu'il l'a connu depuis. [Note du *Journal littéraire*.]

même nombre moins l'unité, et ainsi des autres. Quand on divise le premier de ces produits par le second, le quotient multiplié par $-x$ est $=$ AC. Au contraire, si on divise le second de ces produits par le premier, le quotient multiplié par $-y$ sera $= ac$.

Exemple.

Soit l'équation qui exprime la nature de la courbe

$$ay^3 + xy^3 + b^2y^2 - x^2y^2 - \frac{x^3}{2a}y^2 + 2x^4 - 4ab^3 = 0.$$

1. Multip. par 1. + 1. 0. 0. 0. — 1. — 2. — 2. } ou par une autre
2. Multip. par 0. + 1. 0. + 2. + 3. + 4. 0. } progr. Arith.

1. Produit $ay^3 + xy^3 \qquad - 4x^4 + 8ab^3$

2. Produit $+ xy^3 - 2x^2y^2 - \frac{3x^3}{2a}y^2 + 8x^4$

par conséq. $AC = \dfrac{ay^3 + xy^3 - 4x^4 + 8ab^3}{+ xy^3 - 2x^2y^2 - \frac{3x^3}{2a}y^2 + 8x^4}$ par $-x$

et $ac = \dfrac{+ xy^3 - 2x^2y^2 - \frac{3x^3}{2a}y^2 + 8x^4}{ay^3 + xy^3 - 4x^4 + 8ab^3}$ par $-y$.

On voit par cette méthode :

1°. Que de mener une tangente par un point donné dans la courbe n'est qu'un problème simple;

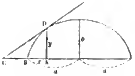
2°. Que non-seulement on peut trouver un nombre infini de différentes constructions pour mener une tangente, mais qu'on peut même suivre un nombre infini de routes différentes, qui donnent chacune un nombre infini de constructions pour ce problème. C'est ce qui paroit quand on considère que les deux produits qu'on emploie dépendent, chacun en particulier, d'une progression arithmétique prise à volonté : et on voit cette vérité encore plus clairement quand on fait réflexion que la ligne AC, le point B et l'angle ▲ peuvent être pris à discrétion. Sans compter combien toutes ces constructions peuvent encore en donner d'autres par l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction de racine;

3°. Pour trouver quelqu'une des constructions les plus simples, il faut employer une progression arithmétique dans laquelle o entre, il faut multiplier par o le terme qui a le plus de membres, ou qui est le plus difficile à construire. C'est ce qu'on a observé dans l'exemple précédent, lorsqu'on a mis premièrement o sous yy, et, en second lieu, sous le terme où x ne se trouve point;

4°. Quand dans l'équation y n'est que dans un terme, et que ce terme n'a qu'un seul membre, on peut exprimer AC et ac par une expression dans laquelle y n'entre point; c'est la même chose à l'égard de x. Pour cet effet, il faut multiplier par o dans la progression le terme dans lequel y ou x se trouve.

EXEMPLES.

Ellipse.

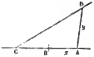


$$y^2 a^2 \quad * \quad - 2ab^2 x + b^2 x^2 = 0$$
$$0. - 1. \quad - 2. \qquad - 2.$$
$$0. \quad 0. \quad + 1. \qquad + 2.$$

$$AC = \frac{+ 4ab^2x - 2b^2x^2}{- 2ab^2x + 2b^2x^2} \text{ par } - x$$

ou bien $AC = \frac{+ 2a - 1x}{a - 1x}$ par x, c'est-à-dire AF — AE = AB — AC.

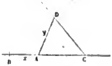
Parabole.



$$\left.\begin{array}{l} y^2 - ax = 0 \\ 0. - 2 \\ 0. + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} AC = \frac{+ 2ax}{- ax} \text{ par } - x \\ AC = - 2x \end{array}$$

On voit dans cet exemple la vérité de la construction générale que le Père *Mersenne* attribue à *M. Fermat*, et qui regarde les différentes sortes de Paraboles.

Hiperbole.



$$\left.\begin{array}{l} xy - ab = 0 \\ 0. - 1 \\ 0. - 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} AC = \frac{ab}{ab} \text{ par } - x \\ AC = - x \end{array}$$

En cinquième lieu. On voit aisément comment on peut trouver sans peine les équations les plus abrégées pour mener, par un point donné hors d'une courbe, une tangente ou une perpendiculaire à cette courbe.

Je vous prie, Monsieur, que ce que je vous envoie reste secret, et que vous ne disiez pas, même à qui que ce puisse être, qu'on a trouvé rien de semblable. Il faut que mes meilleures inventions ne soient connues que de mes plus intimes amis, ou qu'elles le soient de tout le monde.

RICCI,

Né en 1619, mort en 1682.

—

Excerpta è Geometricis exercitationibus [1].

Lemma primum. Si duæ rectæ in eadem ratione secentur, producta similia facta

---

[1] *Michaelis Angeli Riccii Geometrica exercitatio. Romæ, apud Nicolaum Angelum Tinassium*, 1666; petit in-folio.

Cet ouvrage est extrêmement rare : l'exemplaire que j'ai consulté appartient à la Bibliothèque

ex segmentis tanquam ex radicibus, erunt proportionalia productis homogeneis quæ fiant ex totis.

Ex. gr. si $a = b + c$, $d = e + f$, *et* $\frac{b}{c} = \frac{e}{f} = \frac{m}{n}$, *erit* $\frac{b^m c^n}{a^{m+n}} = \frac{e^m f^n}{d^{m+n}}$.

Lemma secundum. Iisdem positis, si $b^m c^n$ fuerit maximum omnium similium productorum ex binis segmentis rectæ a, etiam $e^m f^n$ erit maximum productorum similium ex binis segmentis rectæ d, tanquam ex radicibus.

Theorema primum. Productum in aliqua recta linea factum secundum positos ter-

Impériale; il paraît avoir été corrigé de la main de l'auteur. L'*Exercitatio geometrica* a été réimprimée à Londres, en 1668, à la suite de la *Logarithmotechnia* de *Mercator*, *propter operis præstantiam et exemplarium raritatem.*

Michel Ange Ricci est peu connu. Son nom ne se trouve pas dans la *Biographie universelle*, et *Montucla* ne dit que quelques mots à son sujet dans l'*Histoire des Mathématiques*. C'est pourquoi j'ai pensé qu'on lirait avec intérêt une notice biographique, que nous devons, M. Biot et moi, à la libéralité et à l'érudition du R. P. Paolo Beorchia :

« *Michel Ange Ricci* naquit à Rome le 30 janvier 1619, et y fit son séjour habituel. Son père, « *Prosper Ricci*, était de Côme dans le Milanais, et sa mère, *Véronique Cavalieri*, de Bergame. « Quoique ses parents eussent une médiocre fortune et une famille nombreuse, ils ne négligèrent « rien pour procurer à leurs enfants une forte instruction. *Michel Ange Ricci* fit d'excellentes « études littéraires; il cultiva avec succès les langues latine et grecque, et se rendit maître de « toutes les finesses de la langue italienne. Son goût particulier pour les mathématiques fut heu- « reusement servi par les relations qu'il eut la bonne fortune de contracter avec *Evangelista Torri-* « *celli*. Ce célèbre disciple de *Galilée* se prit d'une grande amitié pour *Ricci* et l'aida puissamment « dans ses études mathématiques. Après son départ de Rome, *Torricelli* entretint avec *Ricci* un « commerce suivi de lettres, et en mourant il ordonna, par testament, que ses manuscrits fussent « transmis d'abord à *Bonaventura Cavalieri*, à Bologne, ensuite à *Ricci*, à Rome, confiant à ces « géomètres le soin de publier les travaux qui leur paraîtraient dignes d'être mis au jour, et de « suppléer à leur imperfection. Mais les derniers vœux de Torricelli n'ont pas été remplis : Cava- « lieri le suivit de près dans le tombeau, et Ricci, distrait par d'autres affaires, ne put s'occuper « de la publication des manuscrits de son maître. En effet, *Ricci* avait embrassé des études si « variées et s'était adonné à des travaux d'érudition d'une telle étendue, que, pour les continuer, « il devait chercher à se procurer les ressources qu'il ne trouvait pas dans son patrimoine. Il « résolut alors d'embrasser l'état ecclésiastique, vers lequel il se sentait naturellement porté, et « de consacrer ses talents à la défense du Saint-Siége. Il se livra plus que jamais à l'étude de la « théologie et du droit, et parvint ainsi à s'assurer une existence honorable.

« *Ricci*, cependant, n'avait pas délaissé la géométrie qui lui était si chère, et en 1665 il fit im- « primer un court essai, sous le titre : *Michaelis Angeli Riccii geometrica exercitatio. Romæ, apud* « *Nicolaum Angelum Tinassium*, 1666; petit in-folio de 18 pages, avec figures gravées dans le « texte. L'ouvrage est dédié à l'abbé *Stefano Gradi*. Il a été imprimé une seconde fois à la suite de « la *Logarithmotechnia* de Mercator, sous le titre : *Michaelis Angeli Riccii Exercitatio geometrica* « *de Maximis et Minimis. Londini, typis Guilielmi Godbed, etc.*, 1668; in-4° de 14 pages, avec « figures à part.

« Dans sa dédicace à l'abbé *Gradi*, *Ricci* promettait de publier deux autres ouvrages : I. *De* « *præceptis universæ artis analyticæ, geometrica methodo breviter et expedite demonstratis, una* « *cum animadversionibus erratorum quæ in ipsis tradendis magni nominis auctores errasse depre-* « *hendi.* II. *De geometrica in genere propositiones.* Il dit d'une de ces dernières propositions :

minos æquales, maximum est omnium similium productorum, quæ fieri possunt ex binis lineæ datæ segmentis tanquam ex radicibus.

Theorema secundum. Si duo rectæ lineæ *a* segmenta *b* et *c* fuerint in ratione terminorum inæqualium *m* et *n*, et per consequens, divideudo, sit differentia *b* — *c* segmentorum ad minus segmentum *c*, ut differentia *m* — *n* terminorum ad minorem terminum *n*; quoties ex dignitate differentiæ *b* — *c* segmentorum ducta in

« *Integram doctrinam triginta propositionum Archimedis, quæ Valerii et aliorum, una complec- « titur, à Torricellio et à te quoque tantopere commendata*; et de deux autres : *quibus totam « pene Jo. Caroli de la Faille de centro gravitatis partium circuli et Elypseos doctrinam (justo « volumine ab ipso explicatam) absolvo.* Mais ces écrits n'ont jamais vu le jour, et on ignore même « ce que sont devenus les manuscrits originaux.

« *Angelo Fabroni*, dans le tome second des *Lettere inedite di uomini illustri*, imprimé *in Fi- « renze*, 1775, in-8°, a publié cinquante-huit lettres écrites en italien par *Ricci*, et envoyées à « Florence de l'année 1645 à l'année 1675. La plupart sont adressées au cardinal prince *Leopold « de Médicis*, grand protecteur des savants, et très-savant lui-même. L'auteur y traite beaucoup « de sujets littéraires en mathématiques. On ne trouve plus rien autre d'imprimé sous le nom de « *Ricci*, si ce n'est des fragments sur des matières ecclésiastiques et légales. La bibliothèque du « Vatican possède encore un grand nombre de ses manuscrits : tous sont relatifs à des matières « ecclésiastiques, et principalement à la controverse qui s'éleva à cette époque avec les Jansénistes « de France ; ils n'offrent aucun intérêt.

« Les pontifes Alexandre VII, Clément IX et Innocent XI firent un fréquent usage de la plume « de *Ricci* dans la controverse du Jansénisme, et lui donnèrent ainsi beaucoup d'occupation. » Cependant *Ricci* n'abandonna jamais les mathématiques, et il entretint une correspondance très- « étendue et très-suivie avec les meilleurs géomètres de l'Italie et de l'étranger, avec *Thevenot* et « *Huyghens*, avec les premiers fondateurs de l'Académie des Sciences de Paris et de la Société « Royale de Londres. Il aida aussi et soutint l'abbé *Francesco Nazari*, de Bergame, dans l'entre- « prise du *Giornale dei letterati*, dont la publication commença à Rome en 1668; il encouragea « également l'abbé *Angelo Ciampini*, qui avait formé une Académie privée, dont le but prin- « cipal était la recherche des antiquités ecclésiastiques et sacrées. En même temps, il était fort « assidu aux assemblées savantes que tenait dans son palais Christine, reine de Suède ; et ce fut « sur les instances de cette princesse, qu'Innocent XI se détermina à récompenser par la pourpre « sacrée du cardinalat les services d'un ecclésiastique si éminent. *Ricci* fut, en effet, promu cardi- « nal le 1er septembre 1681. Cette élévation contrariait tellement les habitudes de sa vie retirée et « studieuse, qu'elle lui fit éprouver le plus vif chagrin. Pour éviter le cardinalat, il fit valoir les « plus grands empêchements, il adressa au Pape suppliques sur suppliques ; mais ce fut en vain. « *Ricci* dut obéir et accepter ; il en souffrit grandement jusqu'à sa mort, qui arriva peu de mois « après, le 12 mai 1682.

« *Ricci* a reçu une sépulture honorable dans l'église des *Religiosi Minori riformati di S. Fran- « cesco a Ripa.*

« L'Académie *del Cimento* de Florence avait prié *Ricci* de revoir et de corriger le manuscrit du « premier volume des *Saggi di naturali esperienze.*

« Pour de plus amples détails sur *Ricci*, consulter *Prospero Mendosio* (*Bibliotheca Romana*), « *Mario Guarnacci* (*Vitæ et res gestæ Pontificum romanorum et S. R. E. Cardinalium*, post *Ciac- « conium*), *Angelo Fabroni* (*Vitæ Italorum doctrina excellentium*, vol. II. — *Pisis*, 1778, in-8°.)

« Collége Romain, 18 février 1856.

« PAOLO BEORCHIA, *D. C. D. G.* »

Traduit de l'italien. [F. L.]

dignitatem minoris segmenti c fit productum maximum, toties fit etiam maximum ex eadem dignitate minoris segmenti c ducta in dignitatem majoris b; atque ita, si dignitates segmentorum pro exponentibus habeant terminos positos m et n, et dignitas differentiæ, differentiam $m - n$ terminorum.

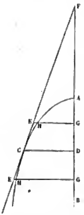
Ex. gr. si $(b - c)^{m-n} c^n$ *maximum est omnium similium productorum ex binis segmentis rectæ* $b - c$, *etiam* $b^m c^n$ *erit productum maximum omnium similium ex binis segmentis rectæ positæ* a.

Theorema tertium. Datâ rectâ lineâ $a = b + c$, et duobus terminis m et n, secundum quos fiat in linea data productum $b^m c^n$: hoc erit maximum omnium similium productorum, quæ fieri possunt ex binis ejusdem rectæ segmentis, velut ex radicibus $\left[\text{si } \frac{b}{c} = \frac{m}{n}\right]$.

Corollarium. Si productum genitum ex dignitate ducta in dignitatem quamcunque maximum fuerit, illarum dignitatum radices et exponentes erunt Geometricè proportionales.

L'auteur montre l'usage du troisième théorème dans la recherche des Tangentes de plusieurs courbes.

Esto [1] parabola quævis AHC, ejusque axis AB, vertex A, ordinatim applicatæ y, abscissæ x, æquatio $y^m = px^n$, $m > n$; quæratur autem linea recta contingens figuram in puncto dato C. Erunt in figura $\frac{\overline{CD}^m}{\overline{AD}^n} = p$. Fiat axis productus ad F itâ ut $\frac{AF}{AD} = \frac{m-n}{n}$, ductaque FC; dico hanc esse tangentem quæsitam.



Productum enim $\overline{AF}^{m-n} \cdot \overline{AD}^n$ est maximum, per theorema tertium. Ergò si accipiamus aliud punctum G in axe suprà D, aut infrà, et ducamus ordinatim applicatam GH, quæ secet in E rectam FC, productum $\overline{AF}^{m-n} \cdot \overline{AG}^n$ non erit maximum in linea FG, quale est simile in linea FD. Ergò $\frac{\overline{AF}^{m-n} \cdot \overline{AD}^n}{\overline{AF}^{m-n} \cdot \overline{AG}^n} > \frac{\overline{FD}^m}{\overline{FG}^m} > \frac{\overline{CD}^m}{\overline{EG}^m}$, sed propter parabolam $\frac{\overline{AD}^n}{\overline{AG}^n} = \frac{\overline{CD}^m}{\overline{HG}^m}$; igitur $\frac{\overline{CD}^m}{\overline{HG}^m} > \frac{\overline{CD}^m}{\overline{EG}^m}$, et $EG > HG$. Ergò punctum E cadit extrà curvam, et FC est illius tangens.

. . . .

Jam verò quàm latè pateat usus nostri theorematis tertii, ex propositis exemplis

[1] La citation n'est pas textuelle. Dans cet exemple, comme dans les propositions qui précèdent, j'ai traduit les raisonnements de l'auteur en langage général algébrique. [F. L.]

licet intelligere; nec ita multum dissimili aut difficiliori via centra gravitatis, et quadraturas, quorum problematum paulò ante meminimus, invenimus.

ISAAC BARROW,

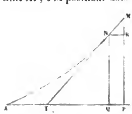
Né en 1630, mort en 1677.

Excerpta è lectionibus Geometricis [1].

Methodus ex calculo Tangentes reperiendi. Lec. X, pag. 80.

..... Subnectemus à nobis usitatam methodum ex calculo Tangentes reperiendi. Quanquam haud scio, post tot ejusmodi pervulgatas atque potritas methodos, an id ex usu sit facere. Facio saltem ex Amici consilio; eòque libentius, quod præ cæteris quas tractavi, compendiosa videtur ac generalis. In hunc procedo modum.

Sint AP, PM positione datæ lineæ (quarum PM propositam curvam secat in M), et MT curvam tangere ponatur ad M, rectam AP secare ad T; ut ipsius jam rectæ PT quantitatem exprimam, curvæ arcum MN indefinitè parvum statuo; tum duco rectas NQ ad MP, et NR ad AP parallelas; nomino MP $= m$, PT $= t$, MR $= a$, NR $= e$; reliquasque rectas, ex speciali curvæ natura determinatas, utiles proposito, nominibus designo, ipsas autem MR, NR (et mediantibus illis ipsas MP, PT) per *æquationem* è calculo deprehensam inter se comparo; regulas interim has observans.



1. Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipsarum a, vel e potestas habetur, vel in quibus ipsæ ducuntur in se (etenim isti termini nihil valebunt).

2. Post *æquationem constitutam* omnes abjicio terminos, literis constantes, quantitates notas seu determinatas designantibus; aut in quibus non habentur a vel e (etenim illi termini semper, ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt).

[1] *Lectiones* 13 *Geometricæ in quibus (præsertim) generalia linearum curvarum symptomata declarantur ab* Isaaco Barrow, *coll. S. Trin. socio, Math. Prof. Lucasiano, et Soc. R. Sodali. Londini*, 1669; in-4°.

Les citations se rapportent à la 2ᵉ édition. *Londini typis Gulielmi Godbed*, 1674, in-4°. [F. L.]

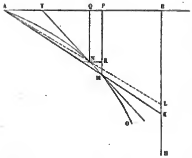
3. Pro a ipsam m (vel MP), pro e ipsam t (vel PT) substituo. Hinc demùm ipsius PT quantitas dignoscetur.

Quod si calculum ingrediatur curvæ cujuspiam indefinita particula, substituatur ejus loco tangentis particula ritè sumpta, vel ei quævis (ob indefinitam curvæ parvitatem) æquipollens recta.

Hæc autem è subnexis exemplis clariùs elucescent.

Exemp. I.

Angulus ABH rectus sit; et sit curva AMO talis ut per A ductâ utcunque rectâ AK, quæ rectam BH secet in K, curvam AMO in M, sit semper subtensa AM æqualis abscissæ BK; hujus curvæ ad M Tangens est designanda.



Fiant quæ suprà præscripta sunt, et (ductâ ANL) nominetur AB $= r$ et AP $= q$; undè AQ $= q - e$, item QN $= m - a$.

Ergò est $q^2 + e^2 - 2qe + m^2 + a^2 - 2ma = (\overline{AQ}^2 + \overline{QN}^2 = \overline{AN}^2 =) \overline{BL}^2$; hoc est (rejectis, uti monitum est, rejiciendis)

$q^2 - 2qe + m^2 - 2ma = \overline{BL}^2$. Porrò est $\frac{AQ}{AN} = \frac{AB}{BL}$; hoc est $\frac{q-e}{m-a} = \frac{r}{BL}$, BL $= \frac{rm - ra}{q - e}$, quare $\frac{r^2m^2 + r^2a^2 - 2r^2ma}{q^2 + e^2 - 2qe} = \overline{BL}^2$; seu (rejectis superfluis) $\frac{r^2m^2 - 2r^2ma}{q^2 - 2qe} = \overline{BL}^2 = q^2 - 2qe + m^2 - 2ma$, vel

$r^2m^2 - 2r^2ma = q^4 - 2q^3e + q^2m^2 - 2q^2ma - 2q^3e + 4q^2e^2 - 2qm^2e + 4qmae$; hoc est (abjectis iis, quæ prescripsimus abjcienda)

$-2r^2ma = -4q^3e - 2q^2ma - 2qm^2e$, vel $r^2ma - q^2ma = 2q^3e + qm^2e$; vel denuò substituendo m pro a, et t pro e, est

$r^2m^2 - q^2m^2 = 2q^3e + qm^2e$; vel $\frac{r^2m^2 - q^2m^2}{2q^3 + qm^2} = t =$ PT.

SLUZE,

Né en 1623, mort en 1685.

Excerpta ex analysi[1].

Caput IV. De maximis et minimis.

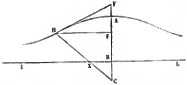
Si fuerint quotlibet magnitudines in continua proportione Arithmetica; minor erit ratio dignitatis maximæ, ad eandem dignitatem cujuslibet intermediæ, cujus dignitatis exponens sit numerus æqualium excessuum intermediæ supra minimam : quam dignitatis ejusdem intermediæ, ad eandem dignitatem maximæ, cujus exponens sit numerus excessuum maximæ supra intermediam. Etc....

Si magnitudo quælibet dividatur in ratione numeri ad numerum; productum ex dignitatibus partium, quarum exponentes sint iidem numeri, erit omnium similium maximum. Etc...

Liceret hujus propositionis usum prolixius extendere, ad determinandas nempe maximas et minimas applicatarum in curvis, taugentes et similia. Verum cùm hanc materiam nuper, in *Exercitatione* sua *Geometrica*, feliciter aggressus sit vir clarissimus *Michael Angelus Riccius*, doctrinâ et humanitate singulari, orbi literato notissimus; et justi operis spem faciat : frustrà nunc pluribus insisterem[2], cùm meliora ac perfectiora ab ipso propediem expectari debeant.

Caput V. De puncto flexus contrarii, in Conchoïde Nicomedis primâ.

A determinatione maximæ vel minimæ, sive τοῦ μοναχοῦ, ut vocat Pappus, pendet etiam inventio puncti flexus, in iis curvis quæ in partes contrarias flectuntur. Ex. gr. In conchoïde Nicomedis primâ, cujus polus C, Asymptotos, sive regula,



IBL, axis CBA, et ex puncto quolibet sumto in curvâ ut H, applicata ad axem HE; ut habeatur in eodem puncto H, Tangens occurrens axi, si opus fuerit, producto in F; CB dicatur *b*, BA *z*, BE *y*. Erit perpetuò $\frac{bz^2y^2 - by^3 + z^2y^3 - y^4}{bz^2 + y^3} =$ EF.

[1] Renati Francisci Slusii *Mesolabum seu duæ mediæ proportionales inter extremas datas per circulum et per infinitas hyperbolas, vel ellipses, et per quamlibet exhibitæ, ac problematum omnium solidorum effectio per easdem curvas. Accessit pars altera de Analysi et Miscellanea. Leodii Eburonum, apud* Guilielmum Henricum Streel, *Serenissimæ suæ Celsitudinis Typographum*; 1668; in-4°.

Le *Mesolabum* seul a paru pour la première fois en 1659.

Je place Sluze après Barrow dans l'ordre chronologique, parce que sa méthode des tangentes n'a été publiée d'une manière explicite qu'en 1673 dans les *Transactions philosophiques*. Voyez pag. 193 et suiv. [F. L.]

[2] *Voir* la lettre de *Collins* à *Newton*, en date du 18 juin 1673, page 196.

Itaque si b, z, y datæ supponantur, non ignorabitur EF.

Similiter pro BF habebimus $\frac{bz^2y - by^3 + z^2y^2 - y^4}{bz^2 + y^2} + y$, sive $\frac{2bz^2y - by^3 + z^2y^2}{bz^2 + y^2}$.

Quoniam verò, si y ignorari supponatur, et BF data esse; æquatio erit amphibola. . . . . . palam est longitudinem ipsius BF, nullo casu esse infinitam, sed terminum habere longitudinis, ex quo unica tangens ad curvam duci poterit; cùm æquationes amphibolæ in puncto maximæ, unicam solutionem habeant, in aliis plures; ut notum est. Est autem ille terminus, ex quo ducitur tangens ad punctum flexûs, quem sic invenire licet.

Fractionis quæ æquivalet rectæ BF, sive $\frac{2bz^2y - by^3 + z^2y^2}{bz^2 + y^2}$, determinatio est $\frac{2bz^2 - 3by^2 + 2z^2y}{3y^2}$: hæc itaque fractio in puncto maximæ æquabitur BF, et per consequens $\frac{2bz^2 - 3by^2 + 2z^2y}{3y^2} - y = $ EF. Habuimus autem suprà, in qualibet tangente, EF $= \frac{bz^2y - by^3 + z^2y^2 - y^4}{bz^2 + y^2}$. Erit igitur æquatio in puncto maximæ $\frac{2bz^2 - 3by^2 + 2z^2y}{3y^2} - y = \frac{bz^2y - by^3 + z^2y^2 - y^4}{bz^2 + y^2}$, et sublatâ fractione per multiplicationem, demtisque æqualibus, ac residuo applicato ad z^2, fiet $2b^2z^2 + 2bz^2y = 3b^2y^2 + 4by^3 + y^4$. Cujus æquationis constructione invenitur y, sive punctum E; ex quo applicata EH, incidet in ipsum punctum flexûs quæsitum : ad quod, y jam inventâ, duci poterit Tangens eo modo, quem suprà indicavimus[1].

---

[1] *Sluze* n'indique ses procédés de calcul ni pour la détermination de la sous-tangente, ni pour la détermination du maximum de la somme de la sous-tangente et de l'abscisse. Il ne les a fait connaître que dans les deux lettres adressées à *Oldenbourg* sous les dates des 17 janvier et 3 mai 1673. Des extraits de la partie essentielle de ces lettres ont été donnés, pages 193 et 195, et le lecteur doit s'y reporter. [F. L.]

CONCLUSION.

CONCLUSION.

Caractère des publications du Commercium Epistolicum *faites en 1712 et en 1722. Discussion de l'avis des Commissaires nommés par la Société Royale.*

Les notes disséminées dans ce recueil me laissent peu de chose à dire sur les deux publications du *Commercium Epistolicum* faites en 1712 et en 1722. Quoique *Halley, Jones* et *Machin* soient plus spécialement les éditeurs de la première, la responsabilité pèse sur tous les membres du Comité, car ils ont concouru dès l'origine à la réunion des pièces du procès, et la Société Royale les a individuellement consultés avant de mettre les rares exemplaires de l'ouvrage à la disposition de l'élite des savants et des littérateurs contemporains. Or si, à l'aide des documents rapportés dans la première partie de notre supplément, on rapproche les extraits primitifs les plus importants des pièces entières d'où ils sont tirés, on reconnaît que le but à atteindre était marqué à l'avance. Pour les Commissaires, il ne s'agissait pas seulement de faire triompher les droits de *Newton* comme inventeur de la méthode des fluxions, il fallait encore effacer les titres de *Leibnitz* à l'invention analogue, et indépendante, du calcul différentiel. On ne peut dire que, pour assurer ce résultat, les transcriptions soient infidèles : mais les citations sont souvent incomplètes, tronquées, faites uniquement pour le besoin de la cause, et les textes sont quelquefois détournés de leur sens propre par les notes anonymes qui les accompagnent. D'ailleurs tous les matériaux sont mis en œuvre avec tant d'art, avec tant d'habileté, qu'on devine sans beaucoup de peine le génie supérieur qui conduisait l'action, sans vouloir paraître personnellement sur la scène.

Si la publication du *Commercium Epistolicum* en 1712 fut une œuvre de parti, que dire de sa réimpression en 1722, six ans après la mort de *Leibnitz?* Dans cette prétendue réimpression, le nouvel éditeur corrige, ajoute, retranche, interpole, commente; et la passion l'aveugle au point qu'il écrit, sans l'y voir, sa propre condamnation dans l'étonnante pièce de polémique qui résume le livre auquel elle sert de préface. Rien n'établit que les membres survivants du Comité de 1712 aient pris part à cette publication déloyale : les documents nouvellement mis au jour ne dénoncent que la main de *Newton*, et la main de *Keill* conduite par *Newton*. C'est

assez pour la mémoire des Commissaires d'avoir à porter le poids d'un Rapport qu'ils n'ont pas osé signer publiquement. Je vais le faire voir. A cet effet je reproduis les conclusions de ce Rapport d'après le texte anglais [1], et je les discute article par article.

« I. M. *Leibnitz* était à Londres au commencement de l'année 1673; il en partit « vers le mois de mars pour aller à Paris; de là il entretint un commerce de lettres « avec M. *Collins*, par l'intermédiaire de M. *Oldenbourg*, et ce commerce dura jus- « qu'au mois de septembre 1676. M. *Leibnitz* retourna ensuite à Hanovre en pas- « sant par Londres et par Amsterdam. M. *Collins* faisait part très-volontiers aux « mathématiciens habiles des communications qu'il avait reçues de MM. *Newton* et « *Gregory*. »

Tous ces faits sont incontestables et incontestés.

« II. Pendant son premier séjour à Londres, M. *Leibnitz* se dit inventeur d'une « méthode des différences, qui n'était pas encore la méthode différentielle; et quoi- « que le D[r] *Pell* eût fait voir que cette méthode des différences n'était autre que « celle de *Mouton*, M. *Leibnitz* n'en persista pas moins à maintenir que cette in- « vention lui était personnelle, tant parce qu'il l'avait tirée de son propre fonds, « que parce qu'il était allé beaucoup plus loin que *Mouton*. Nous n'avons pas vu « que M. *Leibnitz* ait fait connaître qu'il possédât une autre méthode différentielle « que celle de *Mouton*, avant sa lettre du 21 juin 1677, c'est-à-dire un an après « qu'une copie de la lettre de M. *Newton*, en date du 10 décembre 1672, fût « envoyée à Paris pour lui être communiquée; et plus de quatre ans après que « M. *Collins* eût commencé à communiquer cette même lettre aux savants, avec qui « il était en correspondance. Or, dans la lettre de M. *Newton*, la méthode des « fluxions était suffisamment décrite pour toute personne intelligente. »

Voilà certes une accusation habilement présentée! Et remarquons bien qu'il s'agit ici de plagiat, car les Commissaires décideront tout à l'heure que la méthode différentielle et la méthode des fluxions sont une seule et même chose. On commence par faire connaître aux juges les habitudes de l'accusé, sur lesquelles les notes du dossier s'étendent d'ailleurs avec complaisance. Au dire des Commissaires, *Leibnitz* a pris à *Mouton* la méthode des différences; au dire du commentateur anonyme du *Commercium*, *Leibnitz* a pris à *Gregory* la série pour le cercle : est-il étonnant qu'il ait pris à *Newton* la méthode des fluxions, en la déguisant sous un autre nom et sous une notation différente ?

Les faits à charge sont inexacts ou dénaturés. Dans sa lettre du 23 février 1673, *Leibnitz* reconnaît la vérité de l'observation de *Pell* : « Inveni verissime dixisse

[1] Cet avertissement est d'autant plus nécessaire, que la traduction latine n'est rien moins que littérale. Il semble que les premiers éditeurs aient cru devoir apporter une plus grande circonspection dans le choix des termes, lorsqu'ils s'adressaient plus particulièrement aux savants étrangers à la patrie de *Newton*.

« *Pellium.* » Mais il croit devoir repousser tout soupçon d'avoir voulu s'approprier les travaux des autres : « Duobus autem argumentis ingenuitatem meam vindi-« cabo. » Pouvait-il agir avec plus de franchise et de droiture?

Quoiqu'il ne soit pas question des séries dans le Rapport des Commissaires, elles occupent tant de place dans le *Recensio* et dans les notes du *Commercium*, qu'il me paraît à propos d'en parler ici. La seule série pour le cercle que *Leibnitz* ait eu la prétention d'avoir trouvée *proprio marte*, sans le secours de *Gregory* ou de *Newton*, est celle qui donne l'arc par la tangente. Or *Huyghens*, dans une lettre du 7 novembre 1674 [1], déclare que cette série, entièrement nouvelle pour lui, et qu'il rapporte, est consignée dans « l'escrit [de *Leibnitz*] touchant la Quadrature « Arithmétique, » tandis que la correspondance d'*Oldenbourg* prouve que la communication des séries de *Gregory* n'a été faite à *Leibnitz* que le 15 avril 1675, c'est-à-dire bien postérieurement à la rédaction et à la divulgation de la *Quadrature Arithmétique*.

L'histoire de la fameuse lettre du 10 décembre 1672 est plus instructive encore. La Bibliothèque Royale de Hanovre possède l'autographe [2] d'*Oldenbourg* en date du 26 juillet 1676 : là se trouve la partie de l'*Historiola* de *Collins* qui a été en réalité envoyée à *Leibnitz*. Voici en quels termes *Oldenbourg* mentionne, dans cette pièce, la lettre de *Newton*, où, selon les Commissaires, « la méthode des fluxions était suffisamment décrite pour toute personne intelligente » :

« Defuncto *Gregorio* congessit *Collinius* amplum illud commercium literarium, « quod ipsi inter se coluerant, in quo habetur argumenti hujus de seriebus histo-« ria : cui *D. Newtonus* pollicitus est se adjecturum suam methodum inventionis « illius, prima quaque occasione commoda edendam; de qua interea temporis hoc « scire præter rem non fuerit, quod scilicet *D. Newtonus* cum in literis suis « Decemb. 10. 1672 communicaret nobis methodum ducendi tangentes ad curvas « geometricas ex æquatione exprimente relationem ordinatarum ad basin, subjicit « hoc esse unum particulare, vel corollarium potius, methodi generalis, quæ « extendit se absque molesto calculo, non modo ad ducendas tangentes accommo-« datas omnibus curvis, sive Geometricas, sive Mechanicas, vel quomodocunque « spectantes lineas rectas, aliisve lineis curvis; sic etiam ad resolvenda alia ab-« strusiora problematum genera de curvarum flexu, areis, longitudinibus, cen-« tris gravitatis etc. Neque (sic pergit) ut *Huddenii* methodus de maximis et mini-« mis, proindeque *Slusii* nova methodus de tangentibus, (ut arbitror) restricta « est ad æquationes surdarum quantitatum immunes. Hanc methodum se inter-« texuisse, ait *Newtonus*, alteri illi, quæ æquationes expedit reducendo eas ad in-« finitas series; adjicitque, se recordari, aliquando data occasione, se significasse

[1] *Uylenbroek*, Ch. Hugenii... Exercitationes mathematicæ et philosophicæ. Hagæ Comitum. 1833. Fasc. 1, pag. 6.

[2] *Gerhardt*, Leibnizens mathematische schriften. Halle, 1848. Band. I, pag. 91.

« Doctori *Barrorio* lectiones snas jamjam edituro, instructum se esse tali methodo « ducendi tangentes, sed avocamentis quibusdam se præpeditum, quominus eam « ipsi describeret. »

Il suffisait à *Leibnitz* d'avoir du génie pour inventer le calcul différentiel, mais il lui aurait fallu l'habileté fabuleuse d'OEdipe pour découvrir la méthode des fluxions sous une pareille enveloppe. Si l'exemple donné ci-dessus à la page 84 du *Commercium Epistolicum* avait été rapporté dans la lettre d'*Oldenbourg*, *Leibnitz* n'y aurait pas puisé une grande instruction, puisqu'il connaissait les lettres de *Sluze* imprimées depuis trois ans dans les *Transactions philosophiques*, et les lettres de *Hudde* publiées par *Schooten* en 1659; seulement il aurait su que *Newton* s'y prenait exactement de la même manière que *Sluze* pour mener les tangentes aux courbes exprimées par des équations rationnelles. Mais cette ouverture même ne lui était pas faite. Voilà cependant le grand argument des Commissaires! Il était mal fondé; au moins, était-il sincère? On a de fortes raisons pour en douter. Les archives de la Société Royale de Londres possèdent encore deux manuscrits [1], qui jettent un grand jour sur cette affaire. Le premier contient treize feuilles, et a pour titre, *Extracts from Mr Gregories Letter*; il renferme la lettre du 10 décembre 1672 tout entière. C'est la *Collectio* ou l'*Historiola* du *Commercium Epistolicum*. L'autre, qui a pour suscription, *To Leibnitz the 14th of June 1676 About Mr Gregories remains*, n'est qu'un abrégé du premier. La lettre de *Newton*, comme dans la copie trouvée à la Bibliothèque Royale de Hanovre, y est reproduite par extrait et sans l'exemple de la tangente. Ou le travail des Commissaires a été préparé avec une légèreté inexcusable, ou un fait de cette importance n'a pu échapper à leur sagacité. Que dire alors de l'omission calculée des deux lettres de *Sluze* dans l'édition de 1712, et de l'introduction frauduleuse de cette nouvelle charge dans l'édition de 1722 : « *Hæc* COLLECTIO *ad D.* Leibnitium *missa fuit* 26 JUNII 1676 [2]? »

---

[1] *Edleston*, Correspondence of sir Isaac Newton and professor *Cotes*. London, 1850, pag. XLVII.

[2] Dans la 2e édition de la vie de Newton qui a paru en 1855, sir D. *Brewster* cherche encore à jeter quelques doutes sur les conséquences logiques des faits découverts par MM. *Edleston* et *Gerhardt*. Le lecteur, désireux d'approfondir cette question, devra consulter l'article inséré par M. le professeur *A. de Morgan* dans le *Companion to the Almanac for* 1852. Je me bornerai à réfuter ici les arguments que sir D. *Brewster* tire des assertions de *Collins* et de *Newton*, et du silence de *Leibnitz*.

Au no XLVII, page 101, *Collins* écrit : « Sequentem [narrationem] ideo ad eos [eruditos ex « Academia Regia Parisiensi] transmittendam curavi. » Et *Newton*, dans le *Recensio*, page 19 : « Adhuc extant ipsius *Collinii* manu exarata, hoc titulo : *Extracta ex D.* Gregorii *literis, D.* Leibnitio *commodanda, qui exorandus est, ut cum usus eis fuerit, tibi* [Oldenburgo] *ea remittat.* « Porro hæc extracta ad *Leibnitium* missa fuisse, TESTIS est ipse *Collinius*, in epistola ad *Davidem* « *Gregorium Jacobi τοῦ μακαρίτου* fratrem, data 11 Aug. 1676; idque amplius constat ex *Leibnitii* « *Tschurnausii* que responsis. »

La note de *Collins* dit seulement qu'il a donné des soins à l'envoi de l'*Historiola* aux savants de l'Académie de Paris; elle ne TÉMOIGNE nullement que l'envoi ait été fait à *Leibnitz*. Le titre du

« III. Il est évident, par la lettre du 13 juin 1676, que M. Newton avait la mé-
« thode des fluxions plus de cinq ans avant qu'il écrivit cette lettre. La communi-
« cation du traité *de analysi per æquationes numero terminorum infinitas*, faite par
« le Dr Barrow à M. Collins, en juillet 1669, nous montre même que M. Newton
« avait inventé la méthode des fluxions avant cette époque. »

La conception de la méthode des fluxions paraît, en effet, remonter à 1666, mais le traité *de analysi*, qui seul a une date à peu près certaine, fait connaître d'une manière générale les résultats que l'auteur peut atteindre, sans indiquer les moyens d'y parvenir. On ne voit ni algorithme pour représenter les fluxions, ni règles pour les déterminer : en un mot, il n'y a pas encore là un calcul.

On a souvent agité la question de savoir si Leibnitz avait eu connaissance du traité *de analysi*, avant d'écrire la lettre du 21 juin 1677, où il a si clairement montré qu'il possédait les principes du calcul différentiel. Newton ne dit rien à ce sujet dans le *Recensio*; et, dans une note ajoutée à la lettre de Leibnitz du 21 juin 1677, il se borne à une insinuation : « Lectis fortean et aliis *Newtonianis* [scriptis] « sub finem anni 1676, ubi domum per *Londinum* redibat. » Les Commissaires, plus timides encore, posent seulement en fait dans le premier article de leur avis, que Collins communiquait très-libéralement aux mathématiciens habiles les écrits qu'il recevait de Newton et de Gregory. Indépendamment du silence du *Commercium Epistolicum* et de ses annexes, plusieurs raisons portent à penser que Leibnitz n'a connu le *de analysi* que lorsqu'il était déjà maître des éléments du calcul différentiel et du calcul intégral. J'expose sommairement les deux principales; elles s'appuient sur le texte de la correspondance d'Oldenbourg, et sur les documents conservés à la Bibliothèque Royale de Hanovre.

---

n° XLVI, page 100, rappelé par le *Recensio*, établit que la communication de *Collins* à *Leibnitz* devait être faite par l'intermédiaire d'*Oldenbourg*. Or *Oldenbourg*, en envoyant à *Leibnitz* une copie et se réservant l'autographe, ne faisait que suivre une habitude qui lui était constante. Ainsi dans la lettre du 2 mai 1677, qui annonçait enfin l'envoi si retardé de la lettre de *Newton* en date du 24 octobre 1676, il dit en propres termes : « Mitto tibi APOGRAPHUM literarum *Newtoni*, « AUTOGRAPHUM ad memet directum mihi reservans. » Est-il besoin d'une autre raison pour expliquer la présence, dans les archives de la Société Royale, de l'extrait de *Collins* avec la mention : « TO LEIBNITZ? »

Les réponses de *Leibnitz* et de *Tschirnausen* ne font en aucune façon connaître si l'envoi d'*Oldenbourg* comprend l'*Historiola* ou simplement un extrait de l'*Historiola*. Quant au silence de *Leibnitz* sur le point spécial dont il s'agit, il est suffisamment justifié par les habitudes de son caractère et de sa vie, et par ce passage de la lettre adressée à l'abbé *Conti* sous la date du « 9 Avril 1716 : « Pour répondre de point en point à l'ouvrage publié contre moi, il falloit un « autre ouvrage aussi grand pour le moins que celui-là : il falloit entrer dans un grand détail de quan- « tité de minuties passées il y a trente à quarante ans, dont je ne me souvenois guere : il me « falloit chercher mes vieilles lettres, dont plusieurs se sont perdues, outre que le plus souvent « je n'ai point gardé les minutes des miennes : et les autres sont ensevelies dans un grand tas « de papiers, que je ne pouvois débrouiller qu'avec du temps et de la patience; mais je n'en « avois guere le loisir, étant chargé présentement d'occupations d'une toute autre nature. »

Leibnitz ne paraît avoir eu aucun commerce avec Collins, lors de son premier séjour à Londres, au commencement de l'année 1673 [1]. Le nom de Collins apparaît pour la première fois dans une lettre qu'Oldenbourg adresse à Leibnitz, alors à Paris, sous la date du 6 avril 1673 [2] : « Scias itaque primo, me scriptum illud « tuum de interpolationum doctrina, deque tuo cum clarissimo *Pellio*, circa id argu- « mentum et *Moutonum* colloquio, impertiisse doctissimo nostro *Collinio*, SIMILITER « E SOCIETATE REGIA, qui in hac est sententia etc. » Peut-on croire qu'Oldenbourg aurait jugé nécessaire de définir la personne de Collins avec autant de précision, si Leibnitz avait eu avec ce savant des relations antérieures qu'il ne pouvait ignorer?

Le premier extrait du *de analysi*, qu'Oldenbourg communiqua à Leibnitz, se trouve dans la lettre de Newton du 13 juin 1676 ; et le correspondant ne se borne pas, comme les éditeurs du *Commercium Epistolicum*, à renvoyer au traité ; il transcrit en entier les deux tableaux [*diagrammata*], où sont présentés les exemples de calculs pour la résolution des équations numériques et des équations littérales. Seulement, il n'accompagne pas les tableaux des explications qui sont données dans le *de analysi* : « præcipua difficultas est in inventione primi termini radicis ; id quod « methodo generali perficitur ; sed hoc, brevitatis gratia, jam prætereo ; etc. » C'est Newton qui parle. Leibnitz se trouve médiocrement éclairé par ces renseignements incomplets, et il écrit à Oldenbourg le 27 août 1676 : « Desideraverim ut « clarissimus *Newtonus* non nulla quoque amplius explicet ; ut originem Theore- « matis quod initio ponit : item, Modum quo quantitates p, q, r, in suis opera- « tionibus invenit, etc. » Or la manière de trouver les quantités p, q, r, est parfaitement expliquée dans le *de analysi*. Leibnitz l'aurait-il demandée, s'il avait eu communication du traité? et Newton, s'il avait pensé que cette communication eût été faite, aurait-il répondu le 24 octobre 1676 : « Quæ cl. *Leibnitius* a me desi- « derat explicanda, ex parte supra descripsi. Quod vero attinet ad inventionem « terminorum p, q, r, in extractione radicis affectæ : primum p sic eruo. Etc. »? Je dois ajouter qu'on n'a trouvé aucune copie du *de analysi* dans les manuscrits déposés à la Bibliothèque Royale de Hanovre, mais de simples extraits faits de la main même de Leibnitz. Sur cette pièce, qui ne porte aucune date, les résultats généraux, obtenus par Newton pour les quadratures, sont transcrits et immédiatement interprétés à l'aide de l'algorithme du calcul intégral [3]. Il est possible que les extraits aient été pris sur le manuscrit de Collins, pendant le séjour d'une semaine [4] que Leibnitz fit à Londres au mois d'octobre 1676 ; mais leur contexture ne permet pas

[1] *Newton* avait avancé le contraire dans une Note qui accompagne le n° 73 du *Comm. Epist.* « *Collinius* enim, *Leibnitio* tum non ignotus » ; mais, mieux informé sans doute, il n'a pas maintenu l'assertion dans la *réimpression* de 1722. *Voyez* page 160.

[2] *Gerhardt*, Leibnizens mathematische Schriften, band I, pag. 37.

[3] *Gerhardt*, ouvrage et volume déjà cités, page 7.

[4] *Comm. Epist.*, page 145.

de douter qu'au moment de la transcription Leibnitz ne fût en possession des éléments du calcul intégral. Cette déduction, dans l'hypothèse admise, serait en parfait accord avec d'autres documents trouvés et publiés par M. Gerhardt [1].

« IV. La méthode différentielle est identique [*one and the same*] avec la méthode « des fluxions, au nom et à la notation près. M. Leibnitz appelle *différences* ce que « M. Newton nomme *moments* ou *fluxions*; il les désigne par la lettre *d*, dont « M. Newton ne fait pas usage. C'est pourquoi, la question n'est pas de déterminer « qui a inventé l'une ou l'autre méthode, mais bien quel est le premier inventeur « de la méthode. Dans notre opinion, ceux qui ont tenu M. Leibnitz pour premier « inventeur avaient peu ou point de connaissance de la correspondance que « M. Leibnitz avait eue longtemps auparavant avec MM. Collins et Oldenbourg; « ils ignoraient également que M. Newton possédât cette méthode plus de quinze « années avant que M. Leibnitz en eût commencé la publication dans les *Actes de* « *Leipsick*.

« Pour ces raisons, nous estimons que M. Newton est le premier inventeur de la « méthode, et nous pensons que M. Keill, en soutenant cette opinion, n'a été en « aucune façon injuste à l'égard de M. Leibnitz. »

Presque au même moment où les Commissaires exprimaient cet avis sur *l'identité* des méthodes, Newton faisait imprimer la deuxième édition des *Principes* : là il se bornait à indiquer la *ressemblance*, et il constatait une *différence* essentielle : « Cum significarem me compotem esse methodi....., et literis transpositis hanc « sententiam involventibus..... eandem CELAREM : rescripsit vir [*Leibnitius*] claris- « simus se quoque in EJUSMODI methodum incidisse, et methodum suam COMMUNI- « CAVIT à mea vix abludentem, præterquam in verborum et notarum formulis, et « IDEA GENERATIONIS QUANTITATUM. » Après un pareil aveu, si on ne se laisse pas aveugler par un sentiment étroit de nationalité ou par les habitudes d'un culte idolâtre, on ne pourra nier que « Newton lui-même éternisa les droits de Leibnitz, en « les reconnaissant dans son livre des Principes [2]. »

Leibnitz, de son côté, était loin de méconnaître les liens de parenté qui unissaient les deux méthodes. Il écrivait à Wallis : [3] « Methodum *fluxionum* profundissimi « *Newtoni*, COGNATAM esse methodo meæ *differentiali*, non tantum animadverti « postquam opus ejus et tuum prodiit; sed etiam PROFESSUS SUM [4]..... » Les inventeurs ont donc avoué des similitudes et des différences. De quelle force peut être l'avis des Commissaires, quand on le rapproche de l'aveu de Newton? Où avaient-ils puisé une connaissance assez approfondie de la méthode des fluxions pour être en droit de prononcer qu'elle ne faisait qu'une seule et même chose avec le calcul différentiel? Cette dernière question se présente tout naturellement à

[1] *Gerhardt*, die Entdeckung der Differentialrechnung... Halle, 1848.

[2] *Biographie universelle*, article *Newton*, tome XXXI, page 174.

[3] *Comm. Epist.*, page 164.

[4] *Acta Lipsica*, M. Junii 1686. — *Comm. Epist.*, page 205.

l'esprit, lorsqu'on voit, cinquante ans plus tard, Montucla [1] recourir au traité de Maclaurin pour exposer les idées de Newton. Si les Commissaires avaient apprécié à leur juste valeur la puissance de l'abstraction, le secours de l'algorithme, la force des équations différentielles, ils auraient vu qu'il ne pouvait y avoir là ni premier ni second inventeur. Ils auraient déclaré que Newton était maître de la méthode des fluxions avant que Leibnitz fût en possession du calcul différentiel; ils auraient reconnu hautement que l'invention de Leibnitz était indépendante de celle de Newton, et l'avait précédée comme publication. Telle était la conséquence logique des documents mis sous leurs yeux : il eût été loyal de la proclamer.

Je croirais sortir des limites que cette introduction comporte, et que la prudence m'interdit de franchir, si j'entrais dans une discussion plus complète des similitudes et des différences que présentent les méthodes conçues par Newton et par Leibnitz. Ce travail a été fait à plusieurs reprises, et avec une autorité que je ne puis avoir, par le savant dont la bienveillance paternelle n'a pas craint de m'associer à lui pour la publication actuelle. Il est, à mes yeux, le plus sincère des admirateurs de Newton, parce que nul plus que lui ne s'est appliqué à étudier et à faire comprendre un si grand génie. Je me borne à signaler un fait qui m'a singulièrement frappé dans l'histoire de la science moderne : c'est la stérilité analytique des géomètres Anglais au XVIIIe siècle. Newton n'a pas fait de disciples. L'instrument, qui avait été si puissant dans ses mains, n'eut plus de vertu dans les mains de ses flatteurs les plus ardents ou de ses sectateurs les plus habiles. Fatio et Keill, comme Cotes, Moivre, Taylor et même Maclaurin, ne peuvent balancer les Bernoulli et Euler, en Allemagne, d'Alembert, Clairaut, Lagrange et Laplace, en France. Au contact de Leibnitz on voit naître une génération puissante de mathématiciens habiles en Allemagne et en France, comme étaient nés en Italie Torricelli, Viviani, Cavalieri et Ricci, sous l'inspiration de Galilée; et en Hollande, Schooten, Huyghens, Hudde et Sluse, sous le souffle de Descartes. Bien plus, les grandes découvertes de Newton lui-même ne se propagent et ne se développent sur le continent, que grâce aux efforts des géomètres pour les traduire dans la langue de Leibnitz. N'est-ce pas un grand titre de gloire pour l'inventeur du calcul différentiel, et une preuve irrécusable de la force et de la fécondité toute spéciale de l'invention?

La controverse qui a amené la publication du *Commercium Epistolicum* offre encore un intérêt si vif, malgré l'intervalle qui nous sépare de son origine, qu'on ne peut rester témoin impassible des torts, et des iniquités même, dont elle fut semée. Toutefois, quand des hommes tels que Newton et Leibnitz sont soumis à la discussion, le langage, sévère s'il le faut pour les actes, doit toujours être respectueux pour les personnes. J'ai tâché de me conformer à ce sentiment dans les notes qui accompagnent cet ouvrage, et je regretterais vivement de m'en être écarté sur

[1] *Histoire des Mathématiques*, tome II, page 372.

quelque point. Je ne cache pas mes sympathies pour Leibnitz. Inférieur à Newton quant au sentiment des réalités physiques et à l'esprit d'intuition des lois qui régissent les phénomènes naturels, peut-être au moins son égal dans les spéculations abstraites de l'analyse mathématique, il lui était certainement supérieur par le caractère. Newton inspire l'admiration, Leibnitz attire davantage. Pour moi, il y a tout un monde de passions et de préjugés entre l'esprit généreux, qui correspondait avec Bossuet et rêvait la réunion de toutes les communions chrétiennes, et le sectaire ardent, qui commentait l'*Apocalypse* et signalait l'Eglise de Rome dans la onzième corne du quatrième animal de Daniel.

F. Lefort.

FIN.

ERRATA.

PAGES.	LIGNES.	AU LIEU DE	LISEZ
		1°. Fautes signalées sur l'exemplaire envoyé à Fontenelle par la Société Royale, et non corrigées en 1856.	
65	13	$x + \frac{a}{4}$	$x - \frac{a}{4}$
66	12	$+ \frac{a^3 b^3 x^3}{c^{10}}$	$+ \frac{6 a^3 b^3 x^3}{c^{10}}$
104	2	$+ c^{10}$	$+ 2 c^{10}$
		2°. Fautes reconnues dans la publication de 1856.	
5	24	1719	1716
24	25	continuenda	continuanda
51	20	questio	quæstio
73	3	. . . .	*en marge* N° XII.
80	22	*anno* 170$\frac{8}{9}$	*anno* 167$\frac{8}{9}$
114	31	per extrationes	per extractiones
126	21	suborda	suborta
134	26	per ham seriem	per hanc seriem
145	13	copiosor esse	copiosior esse
180	5	in hanc sententia	in hac sententia
183	15	*is appears*	*it appears*
		Its impossible to print the book without some faults.... [Newton *to* Cotes. *Octob.* 11. 1709.]	